

**T.C.**  
**BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ**

**BİR TÜMÖR-BAĞIŞIKLIK MODELİ İÇİN HOPF  
ÇATALLANMA VE KARARLILIK ANALİZİ**

**Yüksek Lisans Tezi**

**VEYSEL KILINÇ**

**İSTANBUL, 2014**



**T.C.  
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
UYGULAMALI MATEMATİK**

**BİR TÜMÖR-BAĞIŞIKLIK MODELİ İÇİN HOPF  
ÇATALLANMA VE KARARLILIK ANALİZİ**

**Yüksek Lisans Tezi**

**VEYSEL KILINÇ**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. CANAN ÇELİK KARAASLANLI**

**İSTANBUL, 2014**

**T.C.**  
**BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**UYGULAMALI MATEMATİK**

Tezin Adı: BİR TÜMÖR-BAĞIŞIKLIK MODELİ İÇİN HOPF ÇATALLANMA VE  
KARARLILIK ANALİZİ

Öğrencinin Adı Soyadı: Veysel KILINÇ

Tez Savunma Tarihi: 11.04.2014

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğu Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

-----  
Doç. Dr. Tunç BOZBURA  
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğunu onaylıyorum.

-----  
Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU  
Program Koordinatörü

Bu Tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli görülmüş ve kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmzalar

Tez Danışmanı  
Doç. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI

Üye  
Doç. Dr. Davut UĞURLU

Üye  
Yrd. Doç. Dr. Süreyya ÖZÖĞÜR AKYÜZ

## TEŞEKKÜR

Çalıőma sırasında bilimsel katkıları ile bana yardımcı olan, eğitimim süresince benden yardımlarını esirgemeyen, tez danışmanım ve hocam sayın Doç. Dr. Canan Çelik Karaaslanlı'ya en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım. Yüksek lisans öğretimim boyunca desteklerini ve bilgilerini esirgemeyen ve her konuda bana yardımcı olan Bahçeşehir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim üyelerine teşekkür ederim. Bu zamana kadar benden maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme ve çok sevdiğim dostlarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İstanbul, 2014

**Veysel KILINÇ**

## ÖZET

### BİR TÜMÖR-BAĞIŞIKLIK MODELİ İÇİN HOPF ÇATALLANMA VE KARARLILIK ANALİZİ

Veysel Kılınç

Fen Bilimleri Enstitüsü  
Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Canan Çelik Karaaslanlı

Nisan 2014, 42 sayfa

Bu tezde gecikmeli bir tümör-bağışıklık sisteminin dinamiği incelenmiş ve  $\tau$  gecikme parametresi, çatallanma parametresi olarak seçilerek kararlılık ve Hopf çatallanma analizi çalışılmıştır. Ayrıca normal form teori ve Center Manifold teoremi kullanılarak kritik  $\tau$  değerinde çatallanan periyodik çözümün yönü, kararlılığı ve periyodu elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Tümör-bağışıklık sistemi, Gecikmeli diferansiyel denklem, Hopf çatallanma, Kararlılık.

## ABSTRACT

### DYNAMICAL ANALYSIS OF A TUMOR-UMMİN SYSTEM WITH TIME DELAY

Veysel Kılınç

Graduate School of Applied Sciences  
Department of Mathematics

Thesis Supervisor: Doç. Dr. Canan Çelik Karaaslanlı

April 2014, 42 pages

In this thesis, the dynamics of a delayed tumor-immune system is investigated and by choosing time delay  $\tau$  as bifurcating parameter, the stability and Hopf bifurcation analysis are studied. Moreover, by using normal form theory and center manifold theorem, the direction, stability and the period of the bifurcating periodic solution at critical values  $\tau$  are obtained.

**Keywords:** Tumor-immune system, Delayed differential equation, Hopf bifurcation, Stability.

## İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER .....	vii
SEMBOLLER .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
1.1 TÜMÖR-BAĞIŞIKLIK MODELİ.....	1
1.2 GECİKMELİ SİSTEMLERE GENEL BAKIŞ.....	2
1.3 LİTERATÜRDE GECİKMELİ SİSTEMLER .....	2
1.4 TEZ ÇALIŞMASININ AMACI.....	5
2. ÇATALLANMA ve HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ.....	7
2.1 ÇATALLANMA TEORİSİ .....	7
2.1.1 Çatallanma Türleri .....	7
2.1.2 Lokal Çatallanma ve Türleri .....	7
2.1.2.1 Fold çatallanma .....	8
2.1.2.2 Tırmık çatallanma .....	9
2.1.2.3 Transkritik çatallanma .....	9
2.1.2.4 Flip çatallanma .....	10
2.1.2.5 Hopf çatallanma .....	10
2.2 HOPF ÇATALLANMA .....	10
2.2.1 Hopf Çatallanma Teoremi .....	10
2.2.2 Hopf Çatallanma Türleri .....	12
2.2.2.1 Süperkritik Hopf Çatallanma .....	12
2.2.2.2 Subkritik Hopf Çatallanma.....	12
2.2.3 Hopf Çatallanma Teorisi .....	12
2.3 CENTER MANİFOLD TEOREMİ .....	26
3. KARARLILIK ANALİZİ ve HOPF ÇATALLANMA .....	27
4. HOPF ÇATALLANMANIN YÖNÜ ve KARARLILIĞI.....	33
KAYNAKÇA.....	43



## ŞEKİLLER

Şekil 2.1: Fold çatallanma .....	8
Şekil 2.2: Tırmık çatallanma .....	9
Şekil 2.3: Transkritik çatallanma .....	9
Şekil 2.4: Flip çatallanma .....	10

## SEMBOLLER

Tümör popülasyon yoğunluğu	: $X, x$
Bağışıklık popülasyon yoğunluğu	: $Y, y$
Tümör popülasyonunun büyüme oranı	: $r$
Bağışıklık popülasyonunun büyüme oranı	: $b$
Gecikme ve çatallanma parametresi	: $\tau$
Çatallanma değeri	: $\tau_k$
Denge noktası	: $E_0^*$
Hopf çatallanmanın yönünü belirleyen parametre	: $\mu_2$
Çatallanmanın periyodik çözümünün kararlılığını belirleyen parametre	: $\beta_2$
Çatallanmanın periyodik çözümünün periyodunu belirleyen parametre	: $T_2$

# 1. GİRİŞ

## 1.1 TÜMÖR-BAĞIŞIKLIK MODELİ

Virüslerin tümör hücrelerini öldürmek üzere kullanılabileceğine ilişkin eski hipotez, son 20 yılda yaygın bir biçimde yeniden çalışılmıştır. Onkolitik virüsler pek çok çalışmada tespit edilmiştir. Kanser hücrelerini etkileyen ve çoğaltan ancak sağlıklı hücreleri etkilemeyen virüsler onkolitik virüs işlevi görebilirler. İdeal bir durumda kanserli hastaya onkolitik virüsler aşılandığında veya doğrudan tümöre enjekte edildiğinde bunlar tümörün etrafını sarar ve tümör hücrelerinin yapısını bozar. Tümör hücrelerine giren virüsler çoğalır. Yapısı bozulmuş tümörlü hücrenin erimesi sonucunda yeni bir virüs grubu ortaya çıkar ve komşu tümörlü hücrelerin yapısını bozar. On dokuzuncu yüzyılın başından itibaren tüm tümörlü hücrelerin yapısının bozulacağı ve tümörün temizleneceği hipotezi savunulmuştur. Ne var ki çoğu durumda viral enfeksiyon bağışıklık sistemi tarafından durdurulmuş ve tümör gelişimi üzerinde herhangi bir etki yaratamamıştır. Yeni ters genetik teknolojisi tümör seçici virüsler oluşturmak üzere yeni yöntemler geliştirmiş ve onkolitik virüslerin moleküler viral sitotoksosite mekanizmasının kanserli hastalar için harika bir tedavi yöntemi oluşturabileceğine ilişkin savda önemli gelişmeler kaydedilmesini sağlamıştır. Ne var ki, bu onkolitik virüslerin tedavi edici özellikleri henüz tamamıyla kabul edilmemiştir.

Tümör viroterapinin etkinliğini etkileyen çok sayıda faktör bulunmaktadır. Başlıca faktörler arasında hücre içi yaşam döngüsü ve tümörlü hücreler içindeki viral replikasyon, viral lokalizasyon ya da tümör içindeki hücre dağılımı ve viral enfeksiyonun sebep olduğu bağışıklık sistemi tepkileri yer almaktadır. Hayvanlarda yapılan pek çok deney ve 1. aşama klinik denemeler bu faktörleri incelemek üzere gerçekleştirilmiştir. Örneğin, deneysel olarak yüksek miktarda hücre içi viral yaşam döngüsü tespit edilmiştir. Virüsler hücrenin içine girdiklerinde hücresel proteinleri hedef alan bir dizi gen ürünü ortaya çıkarır ve apoptozun engellenmesi ya da hücre döngüsü girdisine sebep olunması gibi çeşitli hücresel süreçleri modüle eder. Bu da viral replikasyonu ve nihayetinde hücre erimesine ve viral ürünlerin serbest bırakılmasına sebep olan viral proteinlerin üretimine sebep olur. Her bir adım çeşitli molekül grupları tarafından gerçekleştirilir ve her bir adımın tamamlanması için belli bir süreye ihtiyaç vardır. Ne var ki viroterapinin etkinliğine ilişkin tahmin edilebilir

faktörlerin tespit edilmesi için viral kinetiğin entegre ve nicel bir şekilde anlaşılması gerekmektedir. Böyle bir anlayış olmadan, klinik çalışmaların çoğu deneme ve yanılmadan ibaret olacaktır. Bu bağlamda matematiksel modelleme olası tüm sonuçları içeren bir yelpazeye sahip olmamızı ve tedavileri optimize etmek için gerekli mantığı sağlayabilir. Matematiksel modeller aracılığıyla viral dinamiğini anlamak ve karakterize etmek üzere birçok girişimde bulunulmuştur. Bu çalışmalar doğaları itibariyle çoğunlukla nitel simülasyonlar olup viral ve küme parametrelerindeki değişimin tedavinin sonuçlarını nasıl etkileyeceğini incelemektedir. Viroterapinin sonuçları virüsler ve tümörlü hücreler arasındaki etkileşimlere karmaşık bir biçimde bağlıdır. Viroterapinin dinamiklerine ilişkin daha net bir resme ihtiyaç bulunmaktadır.

## **1.2 GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE GENEL BİR BAKIŞ**

Gecikmeli diferansiyel denklemler sistemi, bilimin birçok alanında önemli bir yere sahiptir. Mevcut sistemin herhangi bir girdi veya uyarıya cevabı genellikle hemen olmaz, biraz gecikmeli olur. Biyoloji, tıp, kimya, fizik, matematik, mühendislik ve ekonomi gibi hem doğal hem de insan eli ile oluşturulmuş birçok süreç, zaman gecikmesi içerdiğinden, gecikmeli diferansiyel denklemler teorisi gündeme gelmiştir. Zaman gecikmesine doğadan verilebilecek en güzel örnek ormanlık alanların ağaçlandırılmasıdır. Bir ağaç kesildikten sonra yerine dikilen ağacın olgunluğa erişmesi yirmi yıl gibi bir sürede gerçekleşmektedir veya hasta olan bir insana tedavisi için verilen ilacın etkisini hemen göstermemesi gibi örnekler verilebilir. Bu süreci inceleyen herhangi bir matematiksel model, zaman gecikmesini içermek zorundadır.

Dinamik sistemlerde kendini tekrar eden süreçler söz konusudur. Böyle bir durumda sistem periyodik çözümlere sahiptir. Periyodik çözümlerin varlığını inceleyen teoriler arasında en önemlilerinden biri E. Hopf tarafından geliştirilmiştir. Hopf, parametreye bağlı bir diferansiyel denklemin hangi koşullar altında periyodik çözümlere sahip olduğunu incelemiş ve Hopf Çatallanma Teoremi olarak bilinen teoremi öne sürmüştür.

## **1.3 LİTERATÜRDE GECİKMELİ SİSTEMLER**

Wodarz ve Komarova 2011 yılında kütleler etki yasasına bağlı olarak, tümör hücresi ve hastalıklı tümör hücresi büyümesine ilişkin aşağıdaki genel modeli öne sürmüştür:

$$x' = \frac{dx}{dt} = xF(x, y) - \beta yG(x, y),$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \beta yG(x, y) - ay$$

sisteminde,  $x$  hastaliksız tümör hücresi sayısını,  $y$  ise hastalıklı tümör hücresi sayısını ifade eder.  $F$  fonksiyonu, hastaliksız tümör hücrelerinin büyüme özelliklerini ifade eder ve buna göre,  $F(0,0)$  maksimum büyüme hızına karşılık gelirken,  $G$  fonksiyonu ise tümör hücrelerinin virüsten etkilenme hızını ortaya koyar. Bu iki fonksiyon, modele ne kadar biyolojik ayrıntının dahil edildiğine bağlı olarak çeşitli şekiller alır.  $\beta$  katsayısı, virüsün hastalıklı tümörler yoluyla bulaşıcılık gücünü temsil eder. Hastalıklı tümörler,  $ay$  hızıyla ölür. Bu bilgilerin, viroterapinin zamanla sağladığı etkinin tanımlanması için küçültülmüş basit bir çerçeve olduğunun unutulmaması gerekir. Genel olarak, hastalıklı tümör hücreleri, hastaliksız tümör hücrelerine doğrudan bulaşmaz. Ancak hücre dışı matrisindeki serbest virüsler tümör hücrelerine bulaşabilir. Bu nedenle, yukarıdaki model, açık virüs dinamiğine sahip aşağıdaki modelin düzenlenmiş halidir:

$$x' = \frac{dx}{dt} = xF(x, y) - bvg(x, y),$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = bvg(x, y) - ay$$

denkleminde  $\min\{k,d\} \gg F(0,0)$  ve  $\beta yG(x, y) = b \frac{k}{d} yg(x, y)$  olacaktır. Burada  $vg(x, y)$  virüsün hastaliksız tümör hücreleriyle temas hızını gösterir.  $b$  virüs bulaşma katsayısını (hızını),  $k$  ise hastalıklı bir hücrenin virüs üretme hızını,  $d$  ise virüsün ölüm hızını gösterir. Diğer bir deyişle,  $v$ 'nin yukarıdaki modelde geçen  $\frac{k}{d} y$  işleminin yerine kullanılmasıyla, virüs dinamiğinin genellikle tümör hücresinden çok daha hızlı olmasının avantajı kullanılabilir.

Tipik bir virüs ömür döngüsünde belirli evreler vardır. İlk evre, tutunma evresidir. Serbest bir virüs, tümör hücresinin belirli bir mesafesi içerisine girdiğinde, virüs ile tümörün reseptör alanları arasında kimyasal bağlar oluşur ve tümör hücresinin yüzeyine yapışır. İkinci evre ise, virüs DNA'sının çekirdekten geçerek tümör hücresine yerleştiği penetrasyon evresidir. Virüs, tümör hücresine girdiğinde, biyosentez evresi başlar. Virüs, hücre proteinlerini hedef alan ve çeşitli hücresel süreçleri değiştiren gen ürünleri ortaya çıkardığından, konakçının protein sentezi durur ve konakçının transkripsiyon ve

translasyon engellenir. Bu arada virüs, DNA'sını kopyalamak için konakçının nükleotidlerini; enzim ve proteinlerini sentezlemek için ise konakçının ribozomlarını, enzimlerini ve amino asitlerini kullanır. Olgunlaşma evresinde virüs kapsitleri birleşir, virüs DNA'ları başa toplanır ve kuyruk lifleri complex'lere eklenir. Son adım, salgılama evresidir. Yeni doğmuş virüsler tümör hücresinden salgılanır ve tümör hücresi ölür. Hücre içi virüs yaşam döngüsü, virüsün türüne göre farklılık gösterir ve dakikalarla günler arasında değişir. Virüsün yaşam döngüsünün tüm ayrıntılarının, komplikasyonlardan kaçınmak için tümör dinamiğiyle ilgilendiğimiz bir matematik modeline dahil edilmesi gerekli değilse de, tümör viroterapisinde virüsün hücre içi yaşam döngüsünün ne tür dinamiklerin başlatabileceğini görmek ilgi çekici olabilir. Hücre içi virüs yaşam döngüsünün başlattığı dinamikleri araştırmanın basit bir yolu, döngü zamanı gecikme parametresini mantıklı bir modele dahil etmektir.

Hücre içi virüs yaşam döngüsü zamanını, virüsün tümör hücresine tutunmasından yeni virüslerin ortaya çıkmasına kadar geçen süre olarak tanımlayacağımız  $\tau$  olarak alalım. Hastalıklı fakat henüz virüs üretmeyen tümör hücrelerinin sabit ölüm oranını ise  $n$  olarak alalım. Bu durumda, hastalıklı tümör hücrelerinin  $t - \tau$  ile  $t$  arasındaki sürede hayatta kalma olasılığı  $e^{-n\tau}$  olacaktır. (Daha genel bir tabirle, hayatta kalma olasılığı, 0 ve 1 arasında artış göstermeyen bir  $p(\tau)$  fonksiyonu ile verilir). Daha basit olması açısından, hastalıklı tümör hücrelerinin doğal ölümüyle virüs salgılamasını bir araya getiriyoruz. Bu da sonuç olarak aşağıdaki modeli verir.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= xF(x, y) - \beta yG(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= \beta y(t - \tau)G(x(t - \tau), y(t - \tau))e^{-n\tau} - ay.\end{aligned}$$

1973'te May ,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)[r_1 - a_{11}x(t - \tau) - a_{12}y(t)] \\ \dot{y}(t) &= y(t)[-r_2 + a_{21}x(t) - a_{22}y(t)]\end{aligned}$$

gecikmeli av-avcı sistemini ortaya koymuş ve incelemiştir. Burada  $x(t)$  ve  $y(t)$  sırasıyla av ve avcının  $t$  anındaki popülasyon yoğunluklarını ifade eder.  $\tau \geq 0$  gecikme

parametresidir.  $r_1 > 0$  av popülasyonundaki büyüme oranı,  $r_2 > 0$  ise avcının ölüm oranını vermektedir.  $a_{ij} > 0, i, j = 1, 2$ .

2008'de Çelik,

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1 N(t) - \varepsilon P(t) N(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left( r_2 - \theta \frac{P(t-\tau)}{N(t)} \right)\end{aligned}$$

sürekli ve gecikmeli diferansiyel denklemini incelemiştir. Burada N(t) ve P(t) sırasıyla av ve avcının t anındaki popülasyon yoğunluklarını ifade eder.  $r_1 > 0$  av popülasyonunun,  $r_2 > 0$  avcı popülasyonunun büyüme oranı,  $\tau$  ise gecikme parametresidir.

2011'de Çelik;

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= r_1 N(t) - \varepsilon P(t) N(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(t) \left[ r_2 - \frac{\theta}{N(t-\tau)} \int_{-\infty}^t F(t-\tau) P(\tau) d\tau \right]\end{aligned}$$

dağılımlı gecikmeli av-avcı sistemini incelemiştir. Burada F(s) fonksiyonu  $[0, \infty)$  aralığında negatif olmayan sınırlı gecikme çekirdeğini göstermektedir.

2002'de E.Beretta ve Y. Kuang, 2000'de B.R.Dix, S.J. OCarroll ve 2006'da A.Friedman ve J.P. Tian tümör bağışıklık modellerinde Hopf çatallanma yoluyla periyodik çözümlerin varlığını araştırmışlardır.

#### 1.4 TEZ ÇALIŞMASININ AMACI

Tian ve Kuang'ın 2012'de çalıştığı gecikmeli tümör-bağışıklık modelinde, sistemin tamamında bağışıklık popülasyonuna  $\tau$  gecikme parametresi eklenirse, aşağıdaki gecikmeli tümör-bağışıklık sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t)(1 - x(t) - y(t-\tau)) - bx(t)y(t-\tau) \\ \frac{dy}{dt} &= bx(t)y(t-\tau)e^{-n\tau} - ay(t-\tau)\end{aligned}\tag{1*}$$

(1\*) sisteminde;

$x(t)$  : Tümör t anındaki popülasyon yoğunluğu,

$y(t)$  : Bağışıklık t anındaki popülasyon yoğunluğudur.

Hücre içi viral yaşam döngüsü tümör viroterapisinde önemli bir süreçtir. Tümör viroterapisi için kullanılan matematiksel yöntemlerin çoğunda hücre içi viral yaşam döngüsü kullanılmaktadır. Bu makalede hücre içi yaşam döngüsü kullanılarak yapılan tümör viroterapisine ilişkin bir model sunulmakta ve tartışılmaktadır. Model asıntı diferansiyel denklemlere ait doğrusal olmayan bir sistemdir. İlginç ve zengin dinamik davranışlar sergilemektedir. Hücre içi viral yaşam döngüsü arttıkça iki çeşit stabilite anahtarı ortaya çıkmaktadır. Bunlardan biri enfeksiyonsuz denge solüsyonunda diğeri ise pozitif denge solüsyonunda ortaya çıkar. Bu hücre içi yaşam döngüsü, daha önceki pek çok çalışmada gözlemlenen titreşim olayını da anlamamıza yardımcı olabilir. Önemli klinik implikasyonlardan biri hücre içi yaşam döngüsü süresinin, bir virüsün türünün viroterapi sebebiyle değiştirilmesi durumunda modifiye edilmesi gerektiğidir, zira bu sayede hücre içi yaşam döngüsünün süresi iç denge solüsyonunun stabilitesini ortadan kaldıracak uygun bir aralıkta olması sağlanır.

Yapılan bu çalışmada sırasıyla;

- i. Birinci bölümde, ele alınan problem hakkında genel bilgiler verilmiştir. Bu kapsamda yapılmış olan çalışmalardan bahsedilmiş ve kısaca gecikmeli diferansiyel denklemlere değinilmiştir.
- ii. İkinci bölümde, tezin temel teorisi olan Hopf Çatallanma teorisi detaylıca incelenmiştir. İlk olarak, çatallanmanın genel tanımı verilmiştir, daha sonra fark denklemleri ve adi diferansiyel denklemler için çatallanma tiplerinden, özel olarak da Hopf Çatallanmadan bahsedilmiş ve Center Monifold Teoremi ifade edilmiştir.
- iii. Üçüncü bölümde, sistemin denge noktasının kararlılığı ve Hopf Çatallanması incelenmiştir.
- iv. Dördüncü bölümde, Center Monifold Teoremi kullanılarak bu modelde Hopf Çatallanmanın görülmesi için gerekli koşullar verilmiş, çatallanmanın kararlılığı, türü, yönü ve periyodu belirlenmiştir.



## 2. ÇATALLANMA VE HOPF ÇATALLANMA TEORİSİ

### 2.1 ÇATALLANMA TEORİSİ

Çatallanma, bir sistemde sistemin pozitif denge noktası etrafında seçilen çatallanma parametresindeki küçük değişikliğin, sistemin davranışındaki topolojik değişikliğe neden olmasıyla meydana gelir. Çatallanma analizi sürekli ve kesikli denklemler ile modellenen sistemler için incelenir. Çatallanma teorisi, diferansiyel denklemlerin çözümler ailesinin niteliksel ya da topolojik yapısında meydana gelen değişimlerin incelenmesidir. Dinamik sistemler incelendiğinde, çatallanmanın parametre değerindeki değişim sonucu ortaya çıktığı gözlemlenmiştir.

#### 2.1.1 Çatallanma Türleri

Lokal ve Global olmak üzere iki tür çatallanma vardır.

**Lokal Çatallanma:** Sistemdeki parametrelerin değişimiyle denge noktasının, periyodik yörüngelerin veya invaryant kümelerin özelliklerindeki değişimler analiz edilir.

**Global Çatallanma:** Sistemin invaryant kümelerinin birbirleriyle veya sistemin denge noktasıyla çakışması durumunda ortaya çıkar. Bu çatallanma türü, sistemin denge noktasının kararlılık analiziyle tamamen tespit edilemez.

#### 2.1.2 Lokal Çatallanma ve Türleri

Parametredeki değişimin, denge noktasının kararlılığını değiştirmesiyle lokal çatallanma ortaya çıkar. Bu kısımda  $x_{t+1} = f(x_t)$  birinci mertebeden fark denklemlerinin  $\tau$  parametresine olan bağıllığını

$$x_{t+1} = f(x_t, \tau) \quad (2.1)$$

ile göstereceğiz ve bu fark denkleminin dinamiği göz önüne alınacaktır. Denge noktalarının  $\tau$  bağıllığını ise  $\bar{x}(\tau)$  ile ifade edilecektir. Fark denklemlerinin davranışı  $\tau$  değiştikçe değişmektedir. Davranışın değiştiği bu  $\tau$  değerlerine "çatallanma değeri" ve bu  $(\tau, \bar{x}(\tau))$  noktaları ise "çatallanma noktası" olarak adlandırılır.

(2.1) ile verilen fark denklemi için oluşabilecek çatallanma tipleri  $f'(\bar{x}(\bar{\tau})) = \pm 1$  denklemi ile belirlenmektedir. Bu denklemler için dört farklı tipte çatallanma söz

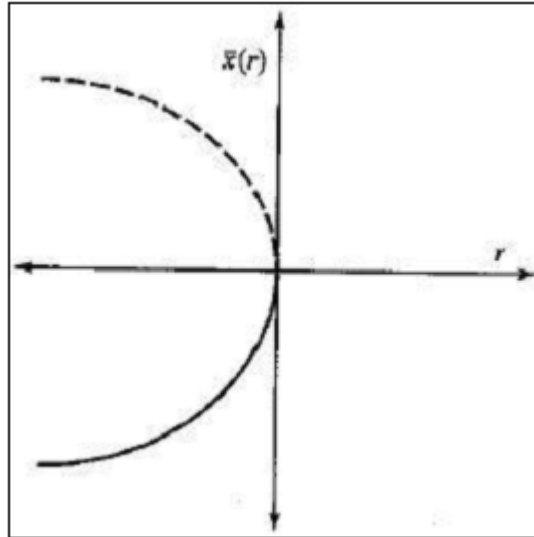
konusudur. Özetle lokal çatallanma türleri,

- a) Fold (saddle node, tangant) çatallanma,
- b) Tırmık (pitchfork) çatallanma,
- c) Transkritik (transcritical) çatallanma,
- d) Flip (period-doubling) çatallanma,
- e) Hopf çatallanmadır.

### 2.1.2.1 Fold çatallanma

Kritik çatallanma değeri geçilirken biri kararlı diğeri kararsız olmak üzere iki denge noktası kaybolur.

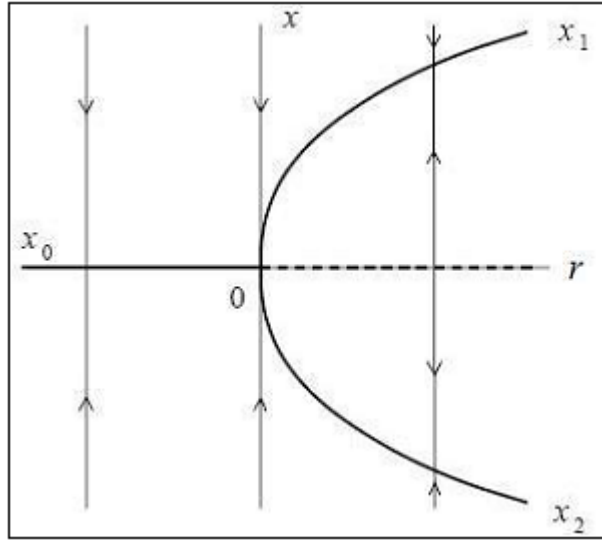
**Şekil 2.1: Fold çatallanma**



### 2.1.2.2 Tırmık çatallanma

Kritik çatallanma değeri geçilirken, bir kararsız denge noktası tarafından ayrılan iki kararlı denge noktası olmak üzere üç denge noktası meydana gelir. Bu tip çatallanmaya "süperkritik tırmık çatallanma" denir. Bunun tam tersine, yani bir kararlı denge noktası tarafından ayrılan iki kararsız denge noktası meydana geliyor ise bu tip çatallanmaya da "subkritik tırmık çatallanma" denir.

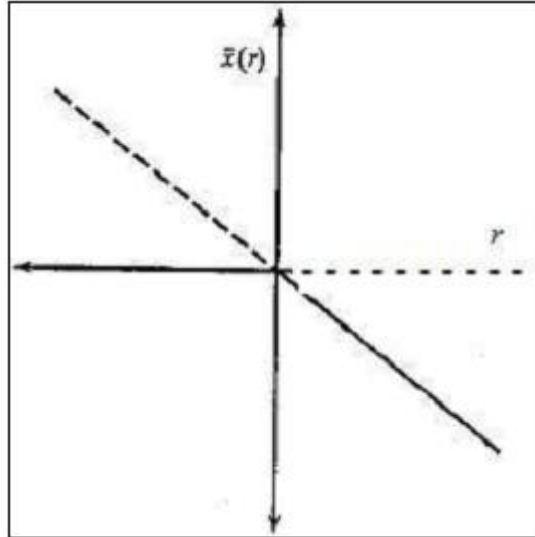
**Şekil 2.2: Tırmık çatallanma**



### 2.1.2.3 Transkritik çatallanma

Bu çatallanma türünde bir kararlı bir kararsız iki denge noktası, çatallanma parametresi geçilirken kararlılık yapılarını değiştirirler. Yani, kararlı olan kararsız, kararsız olan kararlı hale gelir.

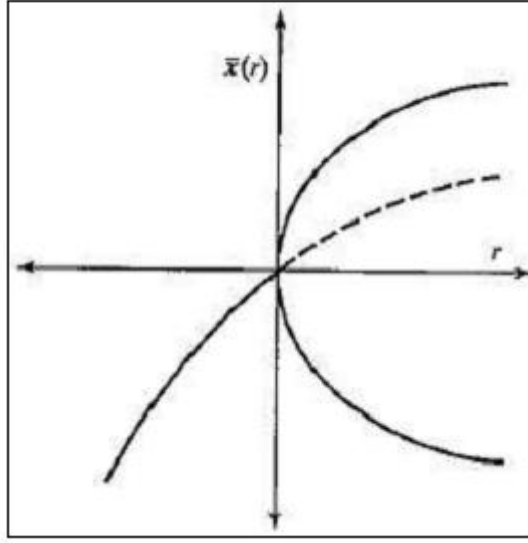
**Şekil 2.3: Transkritik çatallanma**



#### 2.1.2.4 Flip çatallanma

Kritik çatallanma değeri geçilirken, kararlı denge noktası kararsız olur ve kararlı 2-devir ortaya çıkar. Bu tipine "süperkritik flip çatallanma" denir. Tam tersine ise yani ortaya çıkan 2-devir kararsız ise de "subkritik flip çatallanma" adını alır.

Şekil 2.4: Flip çatallanma



#### 2.1.2.5 Hopf çatallanma

İki veya daha fazla birinci mertebeden diferansiyel denklem içeren sistemlerde meydana gelen çatallanma türüne "Hopf Çatallanma" denir. Aynı zamanda, Fransız matematikçi Jules Henri Poincare (1854-1912), Rus matematikçi Alexander A. Andronov (1901-1952) ve Alman matematikçi Heinz Hopf (1894-1971)'un bu teoriyi geliştirmek için yaptıkları katkılardan dolayı Poincare-Andronov-Hopf çatallanma olarak da anılır.

### 2.2 HOPF ÇATALLANMA

#### 2.2.1 Hopf Çatallanma Teoremi

$f$  ve  $g$ ,  $\tau$  çatallanma parametresine bağlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, \tau) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, \tau)\end{aligned}\tag{2.3}$$

diferansiyel denklem sistemi ele alındığında kabul edilsin ki  $(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))$  (2.3) sisteminin denge noktası ve  $\alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$ , bu denge noktasında hesaplanan Jakobian matrisin özdeğerleri olsun. Ayrıca  $\alpha(\tau^*) = 0$  olmak üzere kararlılık yapısındaki değişim  $\tau = \tau^*$  da meydana gelsin.

(2.3) diferansiyel denkleminin periyodik çözümlerin varlığını sağlayabilmesi için ilk önce sıfır sanal özdeğere sahip olacak şekilde denge noktası orijin ve  $\tau$  parametresi  $\tau^* = 0$  olacak şekilde değişken değiştirmeleri yapılarak

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}(\tau)x + a_{12}(\tau)y + f_1(x, y, \tau) \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}(\tau)x + a_{22}(\tau)y + g_1(x, y, \tau)\end{aligned}\tag{2.4}$$

sistemine dönüştürülür. Hopf Çatallanma Teoremi olarak bilinen bu teorem, (2.3) diferansiyel denklem sistemi için aşağıdaki gibi verilebilir.

**Teorem 2.1:** (Hopf Çatallanma Teoremi):

(2.4) sistemindeki  $f_1$  ve  $g_1$  fonksiyonları  $x$  ve  $y$  değişkenlerine göre üçüncü mertebeden sürekli türevlere sahip olmak üzere yeteri kadar küçük  $|\tau|$ 'lar için (2.4) denkleminin bir denge noktası ve

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11}(\tau) & a_{12}(\tau) \\ a_{21}(\tau) & a_{22}(\tau) \end{pmatrix}$$

matrisinin sistemin Jakobian matrisi olduğu kabul edilsin. Ayrıca  $\alpha(0) = 0, w(0) \neq 0$  ve  $\frac{d\alpha}{d\tau}|_{\tau=0} \neq 0$  olmak üzere  $\alpha(\tau) \pm iw(\tau)$ ,  $J(\tau)$  Jakobian matrisinin özdeğerleri olsun bu takdirde  $\mathbb{R}^2$  uzayında orijini kapsayan herhangi U açık kümesinde  $\tau_0 > 0$  için  $|\tau_k| < \tau_0$  değeri vardır öyle ki (2.4) diferansiyel denklemini  $\tau = \tau_k$  için U'da periyodik çözümlere sahiptir (periyot yaklaşık olarak  $T \approx \frac{2\pi}{w(0)}$ ).

## 2.2.2 Hopf Çatallanma Türleri

Hopf Çatallanma Teoremi  $\tau = \tau_k$  için periyodik çözümlerin varlığı adına yeterli olan koşulları vermektedir.  $\tau$  çatallanma parametresi,  $\tau_k$  ise çatallanma değeridir. Sistemin parametresinin değeri değişirken sistemin dinamiği kararlı spiralden merkeze, merkezden de kararsız spirale dönüşür. Buna göre iki tür Hopf çatallanma görülür.

### 2.2.2.1 Süperkritik Hopf Çatallanma

Sistemin kararlı denge noktası asimptotik olarak kararlı bir limit döngüsüne dönüşürse oluşan çatallanmaya denir.

### 2.2.2.2 Subkritik Hopf Çatallanma

Sistemin kararlı denge noktası kararsız bir limit döngüsüne dönüşürse oluşan çatallanmaya denir.

## 2.2.3 Hopf Çatallanma Teorisi

$f$  düzgün bir fonksiyon,  $\tau$  çatallanma parametresi ve  $x \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere

$$\dot{x} = f(x, \tau) \quad (2.5)$$

otonom adi diferansiyel denklem sistemi ele alınsın. Bu bölümde yukarıdaki gecikmeli sistem için Hopf çatallanmanın hangi koşullar altında ortaya çıktığı, çatallanmanın yönü, periyodik çözümlerinin periyodu ve bu çözümlerin kararlılık yapısı incelenecektir.

1) Kapalı fonksiyon teoreminden  $\lambda = 0$  Jakobian matrisin özdeğeri olmadığından, yeteri kadar küçük  $|\tau|$  için orijinin bir komşuluğunda, sistemin  $x_0(\tau)$  denge noktası vardır. Koordinat değişikliği yapılmasıyla, denge noktası orijine taşınır. O halde genellikle birşey kaybetmeden kabul edilebilir ki, yeterince küçük  $|\tau|$  için  $x=0$ , sistemin denge noktasıdır. Bu denge noktasındaki Jakobian matrisi

$$A(\tau) = \left\{ \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x_0(\tau), \tau); i, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

ile ifade edilir. Bu matrise karşılık gelen özdeğerleri hesaplanırsa, bunlar;

Re  $\lambda_{1\geq}$  Re  $\lambda_2 \geq \dots \geq$  Re  $\lambda_n$  olacak şekilde sıralansın.

2) İki boyutlu sistem için bu Jakobian matrisi

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} a_0(\tau) & b_0(\tau) \\ a_1(\tau) & b_1(\tau) \end{pmatrix}$$

şeklinindedir.  $\alpha(0) = 0$  ve  $w(0) \neq 0$  olmak üzere  $A(\tau)$  matrisinin özdeğerleri  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + iw(\tau)$  şeklindedir. Bu özdeğerler  $\frac{d\alpha}{d\tau}|_{\tau=0} \neq 0$  olmak üzere sanal eksenden geçen  $\lambda_1(\tau) = \lambda(\tau)$ ,  $\lambda_2(\tau) = \overline{\lambda(\tau)}$ .

Bu takdirde (1) ve (2) koşullar altında  $x_0(\tau)$  denge noktasında Hopf çatallanmanın görüldüğü bir sistemin taşıdığı özellikler elde edilmiş olur. Bundan sonra verilen adımlar  $\mu_2$ ,  $\beta_2$  ve  $T_2$  değerlerinin hesaplanmasında izlenilmesi gereken yolu vermektedir.

3)  $\mu \in \mathbb{R}$  için  $\tau = \tau_k + \mu$  ve

$$\begin{aligned} x_1(t) &= N(t\tau) - N_0, \\ x_2(t) &= P(t\tau) - P_0 \end{aligned}$$

değişken değiştirmeleri yapılırsa sistem  $C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$  'de fonksiyonel denklem şekline dönüşür  $L_\mu : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^2$  ve  $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in C$  için

$$L_\mu \phi = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} a_0 \phi_1 + b_0 \phi_2 \\ a_1 \phi_1 + b_1 \phi_2 \end{bmatrix}$$

ve

$$f(\mu, \phi) = \begin{bmatrix} a_0 \phi_1 \phi_1 + b_0 \phi_1 \phi_2 \\ a_1 \phi_2 \phi_1 + b_1 \phi_2 \phi_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

4) Riesz Gösterim Teoremine göre  $\theta \in [-1, 0]$  için elemanları sınırlı değişimli  $2 \times 2$  tipinde bir  $\eta(\theta, \mu)$  matris fonksiyonu vardır, öyle ki

$$\phi \in C \text{ için } L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0) \phi(\theta)$$

şeklinde yazılır.  $\eta(\theta, \mu)$  fonksiyonu,  $\delta =$  Dirac Delta Fonksiyonu olmak üzere,

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \delta(\theta) - (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \delta(\theta + 1)$$

şeklinde seçilirse  $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$  için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} -\frac{d\phi(\theta)}{d\theta} & , \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\mu, s)\phi(s) & , \theta = 0 \end{cases}$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0 & , \theta \in [-1, 0) \\ f(\mu, \phi) & , \theta = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece sistem

$$\dot{x}_t = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t$$

formunda yazılır. Burada  $\theta \in [-1, 0)$  için  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ .

$\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^2)^*)$  için

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds} & , s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(t, 0)\psi(-t) & , s = 0 \end{cases}$$

ve  $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$  iken bilineer iç çarpım

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi$$

olarak tanımlanır.  $A(0)$  ve  $A^*$  adjoint operatörleridir.  $A(0)$ 'ın  $i\omega \tau_k$  öz değerlerine karşılık gelen öz vektörü  $p(s)$  dir.  $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$  ve  $\langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 0$  olmak üzere

$$A(0)q(\theta) = i\omega \tau_k q(\theta)$$

ve

$$A^*p(s) = -i\omega \tau_k p(s)$$

yazılır.

5) Center Manifold Teoremi kullanılarak n-boyutlu sistem 2 boyutlu sisteme indirgenir.  $\mu = 0$  iken  $C_0$  Center Manifold'unu tanımlamak için,  $x_t = (x_t^{(1)}, x_t^{(2)})$  sistemin çözümü olmak üzere,  $z$  ve  $\bar{z}$ ,  $C_0$  Center Manifold'un q ve p yönündeki lokal koordinatlar belirlenir.  $C_0$  Center Manifold'u üzerinde



$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = x_t - 2 \operatorname{Re} z(t)q(\theta),$$

$$W(t, \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

dır.  $x_t \in C_0$  çözümü için,  $\mu = 0$  iken  $\dot{x}_t = A(0)x_t + R(0)x_t$ . Bu indirgeme işlemi sırasında verilen sistemin Poincare Normal Formunun

$$\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z})$$

şeklinde olduğu görülür. Bu durumda

$$g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots$$

iken

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z})$$

elde edilir ve Hopf teoremini uygulayabilmek için  $g(z, \bar{z})$  eşitliklerinin her ikisinin de sağ taraflarının karşılaştırılmasıyla  $g_{20}$ ,  $g_{11}$ ,  $g_{02}$  ve  $g_{21}$  katsayılar bulunur.

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{x}_t - \dot{z}q + \bar{z}\dot{q} \\ &= A(0)x_t + R(0)x_t - 2 \operatorname{Re} \left\{ [iw \tau_k z(t) + \bar{p}(0) f_0(z(t), \bar{z}(t))] q(\theta) \right\} \\ &= A(0)[w(t, \theta) + 2 \operatorname{Re} \{ z(t)q(\theta) \}] + R(0)x_t - 2 \operatorname{Re} \{ iw \tau_k z(t)q(\theta) \} \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{p}(0) f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta) \} \\ &= A(0)w(t, \theta) + 2 \operatorname{Re} \{ z(t)A(0)q(\theta) \} + R(0)x_t \\ &\quad - 2 \operatorname{Re} \{ iw \tau_k z(t)q(\theta) - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{p}(0) f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta) \} \} \\ &= A(0)w(t, \theta) + R(0)x_t - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{p}(0) f_0(z(t), \bar{z}(t))q(\theta) \} \end{aligned}$$

$$\dot{W} = \begin{cases} AW - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) \}, & \theta \in [-1, 0) \\ AW - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) \} + f_0 & \theta = 0, \end{cases}$$

$$\dot{W} = A(0)W(t, \theta) + H(z(t), \bar{z}(t), \theta)$$

dır. Buradan

$$A(0)w(t, \theta) - \dot{W} = -H(z, \bar{z}, \theta)$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= W_z \dot{z} + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}} \\
&= W_{20}(\theta) z \dot{z} + W_{11}(\theta) (\dot{z} \bar{z} + z \dot{\bar{z}}) + \dots \\
&= W_{20}(\theta) z (i\omega \tau_k z + g(z, \bar{z})) \\
&\quad + w_{11}(\theta) \{ [i\omega \tau_k z + g(z, \bar{z})] \bar{z} + z [-i\omega \tau_k \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z})] + \dots \} \\
&= 2i\omega \tau_k w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + \dots
\end{aligned}$$

ve

$$A(0)w(t, \theta) = A(0)w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + A(0)w_{11}(\theta) z \bar{z} + \dots$$

olduğundan

$$A(0)W(t, \theta) - \dot{W} = [A(0) - 2i\omega \tau_k] W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + A(0)w_{11} z \bar{z} + \dots$$

dır. Buradan

$$[A(0) - 2i\omega \tau_k] w_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + A(0)w_{11}(\theta) z \bar{z} + \dots = -H_{20}(0) \frac{z^2}{2} - H_{11}(\theta) z \bar{z} - H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} \dots$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının katsayılar karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned}
[A(0) - 2i\omega \tau_k] w_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta), \\
A(0)w_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta)
\end{aligned}$$

ve  $\theta \in [-1, 0]$  için

$$\begin{aligned}
H(z, \bar{z}, \theta) &= -2 \operatorname{Re} \{ \bar{p}(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)) q(\theta) \} \\
&= \bar{p}(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)) q(\theta) - p(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)) \bar{q}(\theta) \\
&= -g(z, \bar{z}) q(\theta) - \bar{g}(z, \bar{z}) \bar{q}(\theta) \\
&= -(g_{20} q(\theta) + \bar{g}_{02} \bar{q}(\theta)) \frac{z^2}{2} - (g_{11} q(\theta) + \bar{g}_{11} \bar{q}(\theta)) z \bar{z} + \dots
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
H_{20}(\theta) &= -g_{20} q(\theta) - \bar{g}_{02} \bar{q}(\theta), \\
H_{11}(\theta) &= -g_{11} q(\theta) - \bar{g}_{11} \bar{q}(\theta)
\end{aligned}$$

ve  $A(0)$ ' in tanımından

$$\begin{aligned}
\dot{W}_{20}(\theta) &= 2i\omega \tau_k W_{20}(\theta) - g_{20} q(\theta) - \bar{g}_{02} \bar{q}(\theta), \\
\dot{W}_{11}(\theta) &= g_{11} q(\theta) + \bar{g}_{11} \bar{q}(\theta)
\end{aligned}$$

bulunur.  $E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$  ve  $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$  sabit vektörler olmak üzere

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\tau_k \omega} q(0) e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k \omega} \bar{q}(0) e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta},$$

$$W_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}}{\tau_k \omega} q(0) e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\tau_k \omega} \bar{q}(0) e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_2$$

şeklinde hesaplanır.  $E_1, E_2$ 'yi bulmak için  $A(0)$ 'ın tanımı ve  $q(0)$ 'ın  $A(0)$ 'ın özvektörü olduğunun bilinmesinden  $d\eta = \eta(\theta, 0)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 d\eta(\theta) W_{20}(\theta) &= 2i\omega\tau_k W_{20}(0) - H_{20}(0) \\ &= \frac{ig_{20}}{\tau_k \omega} \int_{-1}^0 d\eta(\theta) q(\theta) \\ &\quad + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k \omega} \int_{-1}^0 d\eta(\theta) q(\theta) \int_{-1}^0 d\eta(\theta) E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\ &= \frac{ig_{20}}{\tau_k \omega} \dot{q}(0) + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\tau_k \omega} \bar{q}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta) E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \\ &= -g_{20} q(0) + \frac{\bar{g}_{02}}{3} \bar{q}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta) E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta) W_{11}(\theta) = g_{11} q(0) + \bar{g}_{11} \bar{q}(0) + \int_{-1}^0 d\eta(\theta) E_2$$

elde edilir.

$$-g_{20} q(0) - \bar{g}_{02} \bar{q}(0) + \left( 2i\omega\tau_k - \int_{-1}^0 d\eta(\theta) e^{2i\omega\tau_k\theta} \right) E_1 = H_{20}(\theta)$$

ve

$$-g_{11} q(0) - \bar{g}_{11} \bar{q}(0) - \int_{-1}^0 d\eta(\theta) E_2 = H_{11}(\theta)$$

yazılarak  $E_1$  ve  $E_2$  bulunur. Buradan  $w_{11}(\theta)$  ve  $w_{20}(\theta)$  değerlerinin bulunmasıyla  $g_{ij}$  katsayıları belirlenir.

6) Böylece Center Manifold'da  $\tau_k$  kritik değerlerinde oluşan Hopf Çatallanmanın yönünü, çatallanan periyodik çözümün kararlılığını ve çatallanan çözümün periyodunu belirleyen  $\mu_2, \beta_2, T_2$  katsayıları

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega\tau_k} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3}) + \frac{g_{21}}{2}$$

$$\mu_2 = -\frac{\operatorname{Re}\{c_1(0)\}}{\operatorname{Re}\{\lambda(\tau_k)\}}$$

$$\beta_2 = 2\operatorname{Re}\{c_1(0)\}$$

$$T_2 = -\frac{\operatorname{Im}\{c_1(0)\} + \mu_2\operatorname{Im}\{\lambda(\tau_k)\}}{\omega\tau_k}$$

denklemleri ile hesaplanır.

Yukarda verilen analizden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Yardımcı Teorem 2.1:**  $(z, \bar{z}, \tau)$ 'nin düzgün bir fonksiyonu  $g = O(|z|^2)$  olmak üzere,  $z$  kompleks değişkeni kullanılarak, yeterince küçük  $|\tau|$  için, (2.2) sistemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\dot{z} = \lambda(\tau)z + g(z, \bar{z}, \tau) \quad (2.6)$$

**İspat:**  $A(\tau)$ 'nin  $\lambda(\tau)$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $q(\alpha) \in C^2$  olsun. O halde,

$$A(\tau)q(\tau) = \lambda(\tau)q(\tau)$$

dır ve  $A^T(\tau)$ 'nin  $\bar{\lambda}(\tau)$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $p(\tau) \in C^2$  olsun. O halde,

$$A^T(\tau)p(\tau) = \bar{\lambda}(\tau)p(\tau)$$

dır.  $\langle \dots \rangle$ ,  $C^2$ 'de standart skaler çarpma ve

$$\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$$

olmak üzere  $p$ 'nin  $q$ 'ya göre normalize edilmesi

$$\langle p(\tau), q(\tau) \rangle = 1$$

şeklindedir. Herhangi bir  $x \in R^2$  vektörü,

$$x = zq(\tau) + \bar{z}\bar{q}(\tau) \quad (2.7)$$

şeklinde tek olarak tanımlanabilir.  $z$ 'yi tanımlayan açık formül

$$z = \langle p(\tau), x \rangle$$

şeklindedir. Bu formülü gerçeklemek için, (2.4) denkleminin her iki tarafı  $p$  ile skaler çarpılır ve  $\langle p(\tau), \bar{q}(\tau) \rangle = 0$  olduğunun gösterilmesi gereklidir.

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \left\langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle$$

ve buradan

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0.$$

Yeterince küçük her  $|\tau|$  için  $w(\tau) > 0$  olduğundan  $\lambda \neq \bar{\lambda}$ . Böylece  $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$  olduğu görülür. Buradan  $z$  kompleks değişkeni aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\dot{z} = \lambda(\tau)z + \langle p(\tau), F(zq(\tau) + \bar{z}\bar{q}(\tau), \tau) \rangle$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Yardımcı Teorem 2.2:**  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$  ,  $\mu(0) = 0, w(0) = w_0 > 0$  ve

$g_{ij} = g_{ij} = g_{ij}(\tau)$  olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z \bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z|^3) \quad (2.8)$$

denklemini, yeterince küçük her  $|\tau|$  için

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle, kuadratik terim içermeyen

$$\dot{w} = \lambda w + O(|w|^3)$$

denklemine dönüşür.

**İspat:**

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{20} z \dot{z} - h_{11} (\dot{z} \bar{z} + z \dot{\bar{z}}) - h_{02} \dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \lambda z + \left( \frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) z \bar{z} \\ &\quad + \left( \frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{z}^2 + \dots \\ &= \lambda w + \frac{1}{2} (g_{20} - \lambda h_{20}) w^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w \bar{w} \\ &\quad + (g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}) \bar{w}^2 + O(|w|^3) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$$

yazılmasıyla (2.5) denklemindeki tüm kuadratik terimler yok olur.  $w_0 > 0$ ,  $\lambda(0) = iw_0$  iken, yeterince küçük her  $|\tau|$  için paydalar sıfırdan farklı olduğundan yukarıdaki eşitlikler doğrudur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Yardımcı Teorem 2.3:**  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm iw(\tau)$ ,  $\alpha(0) = 0, w(0) = w_0 > 0$  ve  $g_{ij} = g_{ij}(\tau)$  olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + g_{30} \frac{z^3}{6} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + g_{12} \frac{z \bar{z}^2}{2} + g_{03} \frac{\bar{z}^3}{6} + \mathcal{O}(|z|^4)$$

denklemini, yeterince küçük her  $|\tau|$  için

$$z = w + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{21}}{2} w^2 \bar{w} + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle,  $c_1 = c_1(\tau)$  olmak üzere yalnızca bir kübik terim içeren

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + \mathcal{O}(|w|^4)$$

denklemine dönüşür.

**İspat:**

$$w = z - \frac{h_{30}}{6} z^3 - \frac{h_{21}}{2} z^2 \bar{z} - \frac{h_{12}}{2} z \bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6} \bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^3)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2} z^2 \dot{z} - \frac{h_{21}}{2} (2 z \bar{z} \dot{z} + z^2 \dot{\bar{z}}) \\
&\quad - \frac{h_{12}}{2} (\dot{z} \bar{z}^2 + 2 z \bar{z} \dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2} \bar{z}^2 \dot{\bar{z}} + \dots \\
&= \lambda z + \left( \frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2} \right) z^3 + \left( \frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\bar{\lambda} h_{21}}{2} \right) z^2 \bar{z} \\
&\quad + \left( \frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) z \bar{z}^2 + \left( \frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda} h_{03}}{2} \right) \bar{z}^3 + \dots \\
&= \lambda w + \frac{1}{6} (g_{30} - 2 \lambda h_{30}) w^3 + \frac{1}{2} (g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda}) h_{21}) w^2 \bar{w} \\
&\quad + \frac{1}{2} (g_{12} - 2 \bar{\lambda} h_{12}) w \bar{w}^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} (g_{03} + (\lambda - 3 \bar{\lambda}) h_{03}) \bar{w}^3 + O(|w|^4)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\lambda}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\lambda - \lambda}$$

yazılmasıyla  $w^2 \bar{w}$  terimi dışındaki tüm kübik terimler yok olur. Yeterince küçük her  $|\tau|$  için paydalar sıfırdan farklı olduğundan yukarıdaki eşitlikler doğrudur.  $w^2 \bar{w}$  teriminin yok edilmesi için

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}$$

yazılır. Fakat  $\alpha = 0$  iken yukarıdaki denklemin paydası  $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = iw_0 - iw_0 = 0$ .  $\alpha$  ya bağlı bir dönüşüm elde etmek için  $h_{21} = 0$  yazılmasıyla

$$c_1 = \frac{g_{21}}{2}$$

bulunur.

**Uyarı:** Kalan  $w^2 \bar{w}$  kübik terimi "rezonans terim" olarak adlandırılır. Bu terimin katsayısı, orijinal denklemdeki  $z^2 \bar{z}$  kübik teriminin katsayısıyla aynıdır.

**Yardımcı Teorem 2.4:** (Hopf Çatallanma için Poincare Normal Form)

$\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm iw(\tau)$ ,  $\alpha(0) = 0$ ,  $w(0) = w_0 > 0$  ve  $g_{ij} = g_{ij} = g_{ij}(\tau)$  olmak üzere

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^{k-l} z + O(|z|^4) \quad (2.9)$$

denklemini, yeterince küçük her  $|\tau|$  için

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 + \frac{h_{30}}{6} w^3 + \frac{h_{12}}{2} w \bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}^3$$

parametreye bağlı kompleks koordinat değişimiyle,  $c_1 = c_1(\tau)$  olmak üzere yalnızca bir kübik terim içeren

$$\dot{w} = \lambda w + c_1 w^2 \bar{w} + O(|w|^4) \quad (2.10)$$

denklemine döndürür.

**İspat:** Yardımcı Teorem 2.2 de,

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda}, h_{02} = \frac{g_{02}}{2\lambda - \lambda}$$

iken

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w \bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2 \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, tüm kuadratik terimleri yok etmekle birlikte kübik terimlerin katsayılarını da değiştirir.  $w^2 \bar{w}$ 'nin katsayısı  $\frac{1}{2} g_{21}$  yerine  $\frac{1}{2} \bar{g}_{12}$  olur ve Yardımcı Teorem 2.3 deki dönüşümle de, katsayısı  $\frac{1}{2} \bar{g}_{12}$  olan rezonans terim dışındaki tüm kübik terimler yok olur.

Böylece, (2.8) kuadratik dönüşümüyle, bulunması gereken  $c_1$  katsayısı,  $w^2 \bar{w}$  teriminin yeni katsayısı  $\frac{1}{2} \bar{g}_{12}$ .

$\dot{z}$ ,  $w$  ve  $\bar{w}$  cinsinden iki şekilde ifade edilebilir. (2.8) denklemi, (2.6) orijinal denkleminde yerine yazılır veya (2.6)'nın (2.7)'ye dönüştürülebildiği bilindiğinden,  $\dot{z}$ , (2.8)'in türevlenmesi ile hesaplanır.

$$\dot{z} = \dot{w} + h_{20} w \dot{w} + h_{11} (w \dot{\bar{w}} + \bar{w} \dot{w}) + h_{02} \dot{\bar{w}}$$

ve (2.7) kullanılarak  $\dot{w}$  ve kompleks eşleniği yerlerine yazılır. Yukarıda  $h_{20}$ ,  $h_{11}$  ve  $h_{02}$ 'leri içeren ifadede kuadratik terimlerin katsayılarının karşılaştırılmasıyla ve  $w|w|^2$  teriminin katsayılarının eşitlenmesiyle

$$c_1 = \frac{g_{11} g_{20} (2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}$$

elde edilir.  $\tau = 0$  çatallanma parametresi değerinde yukarıdaki denklem



$$c_1(0) = \frac{i}{2w_0} \left( g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}$$

denklemine indirgenir.

**Yardımcı Teorem 2.5:**  $\alpha(0) = 0$ ,  $w(0) = w_0 > 0$  olmak üzere

$$\frac{dw}{dt} = (\alpha(\tau) + iw(\tau))w + c_1(\tau)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

denklemini ele alınsın. Kabul edelim ki,  $\alpha'(0) \neq 0$  ve  $\operatorname{Re} c_1(0) \neq 0$  olsun. Denklem, parametreye bağlı lineer koordinat dönüşümü, yeni zaman ölçeği ve lineer olmayan yeni zaman parametrizasyonu ile

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4)$$

formuna dönüşür.  $s = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} c_1(0)) = \pm 1$ ,  $u$  yeni kompleks koordinat,  $\theta$  ve  $\beta$  sırasıyla yeni zaman ve yeni zaman parametresini gösterir.

**İspat:**

1.Adım: (Lineer zaman ölçeği) Yeni zaman parametresi  $\gamma = w(\tau)t$  şeklinde tanımlanır.

Yeterince küçük her  $|\tau|$  için,  $w(\tau) > 0$  olduğundan zaman korunur. Buradan,

$$\beta = \beta(\tau) = \frac{\alpha(\tau)}{w(\tau)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\tau(\beta))}{w(\tau(\beta))}$$

olmak üzere

$$\frac{dw}{d\tau} = (\beta + i)w + d_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

elde edilir.

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) = \frac{\alpha'(0)}{w(0)} \neq 0$$

olduğundan yeni  $\beta$  parametresi

$$\beta = \beta(\tau) = \frac{\mu(\tau)}{w(\tau)}, \quad d_1(\beta) = \frac{c_1(\tau(\beta))}{w(\tau(\beta))}$$

olarak alınabilir ve ters fonksiyon teoremi,  $\tau$  ya bağlı  $\beta$  fonksiyonunun lokal varlığın garanti eder. Ayrıca  $d_1$  kompleks bir fonksiyondur.

2.Adım: (Lineer olmayan zaman parametresi)  $e_1(\beta) = \operatorname{Im} d_1(\beta)$  için

$$d\theta = (1 + e_1(\beta)|w|^2)d\gamma$$

olmak üzere, yeni zaman parametresi  $\theta = \theta(\gamma, \beta)$  şeklinde tanımlanarak orbitler boyunca zaman parametresi değişir. Zamandaki değişim orijinin küçük bir komşuluğunda özdeşlik dönüşümüdür. Zamanın yeni parametresinin kullanılmasıyla,  $l_1(\beta) = \text{Re } d_1(\beta) - \beta e_1(\beta)$  gerçel olmak üzere

$$\frac{dw}{d\theta} = (\beta + i)w + l_1(\beta)w|w|^2 + O(|w|^4)$$

ve

$$l_1(0) = \frac{\text{Re } c_1(0)}{w(0)} \quad (2.12)$$

elde edilir.

3.Adım: (Lineer koordinat ölçeği)  $u$  yeni kompleks değişken olmak üzere,

$$w = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}}$$

$\text{Re } c_1(0) \neq 0$  olduğundan  $l_1(0) \neq 0$ . Denklem,  $s = \text{sign}(l_1(0)) = \text{sign}(\text{Re } c_1(0))$  olmak üzere

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|}u|u|^2 + O(|u|^4) = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4)$$

formunda yazılır.

**Tanım:**  $l_1(\beta)$  fonksiyonu “birinci Lyapunov katsayısı” olarak adlandırılır.

(2.9) denkleminde,  $\beta = 0$  ’daki birinci Lyapunov katsayısı

$$l_1(0) = \frac{1}{2w_0^2} \text{Re} (ig_{11}g_{20} + w_0g_{21}) \quad (2.13)$$

şeklinde hesaplanır.

Böylece, çatallanma noktasındaki  $l_1(0)$  ’ın hesaplanması için sağ taraftaki ikinci ve üçüncü mertebeden türevlerin bilinmesi gerekir.  $l_1(0)$  ’ın değeri  $p$  ve  $q$  özdeğerlerinin normalizasyonuna bağlıdır ve bu değerlerin işareti,  $\langle p, q \rangle = 1$  normalizasyonunu sağlayan  $p, q$  değerlerine invaryanttır.

Aşağıdaki teoremle, elde edilen sonuçlar özetlenir.

**Teorem 2.2:**

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \tau), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tau \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

iki boyutlu sistemi, yeterince küçük her  $|\tau|$  için  $x = 0$  denge noktasına ve  $\alpha(0) = 0$ ,  $w(0) = w_0 > 0$  olmak üzere

$$\lambda_{1,2}(\tau) = \alpha(\tau) \pm iw(\tau)$$

özdeğerlerine sahiptir.

Aşağıdaki koşullar sağlandığında;

$$(B.1) : \alpha'(0) \neq 0$$

(B.2) :  $l_1$  birinci Lyapunov katsayısı olmak üzere,  $l_1(0) \neq 0$  koordinat, parametre değişimiyle ve zaman dönüşümüyle, (2.11) sistemi

$$\frac{d}{d\gamma} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)$$

olur.

**Teorem 2.3 :** (Hopf Çatallanma için topolojik normal form)

$$\dot{x} = f(x, \tau)$$

bir parametrelili, iki boyutlu sistemi,  $\tau = 0$  da  $x = 0$  denge noktasına ve

$$\lambda_{1,2}(0) = \pm iw_0, \quad w_0 > 0$$

özdeğerlerine sahiptir ve aşağıdaki normal formlardan bir tanesine orijin civarında lokal topolojik eşdeğerdir.

$$\frac{d}{d\gamma} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4)$$

Teorem2.1, Teorem2.2 ve (2.10) denklemi, iki boyutlu sistemlerde Hopf çatallanma analizi için tüm gereksinimleri sağlar.

### 2.3 CENTER MANİFOLD TEOREMİ

$f(0) = 0$  iken,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.15)$$

dinamik sistemi için,  $x_0 = 0$  denge noktasında  $A$  Jakobian matrisinin özdeğerleri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  olsun, Kabul edilsin ki, özdeğerlerinin gerçel kısmı sıfır olsun ve  $\text{Re } \lambda > 0$  olduğunda sayılabilir çoklukta  $n_+$  özdeğerleri,  $\text{Re } \lambda = 0$  olduğunda  $n_0$  özdeğerleri ve  $\text{Re } \lambda < 0$  olduğunda ise  $n_-$  özdeğerleri olsun.  $T^c$  sanal eksen üzerindeki  $n_0$  özdeğerlerinin birleşimine karşılık gelen lineer özvektör uzay olsun. Sanal eksen üzerindeki özdeğerler ( $\text{Re } \lambda = 0$ )  $T^c$  özvektör uzayında olduğu gibi genellikle kritik özdeğer olarak adlandırılır.  $\varphi^t$  fonksiyonu (2.12) eşitliğine karşılık gelen akı olarak tanımlansın.

Yukarıdaki kabullerle aşağıdaki teorem verilir.

**Teorem 2.4:** (Center Manifold Teoremi) (2.12) sisteminin  $n_0$  boyutlu  $W_{loc}^c(0)$  invaryant manifoldu,  $x = 0$  da  $T^c$  özvektör uzayına teğettir. Ayrıca,  $x_0 = 0$  'ı bir  $U$  komşuluğunda, her  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ) için  $(\varphi^t)x \in U$  ise,  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) için  $(\varphi^t)x \rightarrow W_{loc}^c(0)$ .

**Tanım:**  $W_{loc}^c$  manifoldu 'Center Manifold' olarak adlandırılır.

### 3. KARARLILIK ANALİZİ VE HOPF ÇATALLANMA

Bu tezde

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(t)(1 - x(t) - y(t - \tau)) - bx(t)y(t - \tau) \\ \frac{dy}{dt} &= bx(t)y(t - \tau)e^{-n\tau} - ay(t - \tau)\end{aligned}\quad (1^*)$$

sürekli ve gecikmeli diferansiyel denklem sistemi incelenecektir. Bu sistemin tek pozitif denge noktası olan  $E_0^* = (x_0^*, y_0^*)$ ,

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

eşitliklerinden faydalanarak

$$E_0^* = \left\{ \begin{array}{l} x_0^* = \frac{a}{b}e^{n\tau} \\ y_0^* = \frac{1 - \frac{a}{b}e^{n\tau}}{\frac{b}{r} + 1} \end{array} \right\}$$

elde edilir.

$E_0^*$  denge noktasının işareti incelenirse,

$a \geq b$  ise  $y_0^* < 0$ .

$a < b$  ise iki durum vardır.

1.durum

$0 < \tau < \frac{1}{n} \ln \frac{b}{a}$   $\tau$  değerini bu aralıkta seçtiğimizde  $E_0^*$  denge noktası pozitif olur.

2.durum;

$\tau > \frac{1}{n} \ln \frac{b}{a}$  şeklinde alınır ise denge noktası negatif oluyor. Sonuç olarak denge

noktasının pozitif olması için  $a < b$  ve  $0 < \tau < \frac{1}{n} \ln \frac{b}{a}$  şartlarının sağlanması gerekir.

(1<sup>\*</sup>) sisteminde

$$x^*(t) = x(t) - x_0^*$$

$$y^*(t) = y(t) - y_0^*$$

değişken değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= r(x(t) + x_0^*)(1 - x(t) - x_0^* - y(t - \tau) - y_0^*) - b(x(t) + x_0^*)(y(t - \tau) + y_0^*), \\ \frac{dy}{dt} &= b(x(t) + x_0^*)(y(t - \tau) + y_0^*)e^{-n\tau} - a(y(t - \tau) + y_0^*)\end{aligned}$$

(3.1)

sistemi elde edilir. Bu değişken değişimi ile  $(x_0^*, y_0^*)$  denge noktası  $(0,0)$  noktasına taşınmış olur. (3.1) sisteminin lineerleştirilmesi sonucu

$$\frac{dx}{dt} = (r - 2rx^* - ry^* - by^*)x(t) - (rx^* + bx^*)y(t - \tau), \quad (3,2)$$

$$\frac{dy}{dt} = (by^* e^{-n\tau})x(t) + (bx^* e^{-n\tau} - a)y(t - \tau)$$

denklem sistemi elde edilir. (3.2) denklem sistemi

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x(t) - A_2 y(t - \tau),$$

$$\frac{dy}{dt} = A_3 x(t) + A_4 y(t - \tau)$$

şeklindeki denklem sistemine dönüşür. Burada

$$A_1 = r - 2rx^* - ry^* - by^*,$$

$$A_2 = rx^* + bx^*,$$

$$A_3 = by^* e^{-n\tau},$$

$$A_4 = bx^* e^{-n\tau} - a.$$

Lineer denklem sisteminde;

$$x = Ke^{\lambda t} \text{ ve } y = Le^{\lambda t}$$

dönüşümü kullanılırsa

$$K\lambda e^{\lambda t} = A_1 Ke^{\lambda(t-\tau)} + A_2 Le^{\lambda t},$$

$$L\lambda e^{\lambda t} = A_3 Ke^{\lambda(t-\tau)} + A_4 Le^{\lambda t}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{vmatrix} A_1 - \lambda & -A_2 e^{-\lambda\tau} \\ A_3 & A_4 e^{-\lambda\tau} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin sağlanması için

$$\begin{vmatrix} A_1 - \lambda & -A_2 e^{-\lambda\tau} \\ A_3 & A_4 e^{-\lambda\tau} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır. Lineerleştirilmiş sistemin karakteristik denklemi,  $A_4 = 0$

olduğundan  $\lambda^2 - A_1\lambda + A_2A_3e^{-\lambda\tau} = 0$  şeklinde elde edilmiş olur.

**Teorem 3.1:** Aşağıdaki i ve ii koşulları altında,

$$i) \alpha\delta + 1 > \delta,$$

$$ii) \delta(2 + \alpha\delta) < (1 + \alpha\delta)^2(1 + \beta\delta),$$

$\tau = 0$  durumundaki sistemimiz için  $E_0^*$  pozitif denge noktası asimptotik kararlıdır.

**İspat:**  $\tau = 0$  alındığında sistemin karakteristik denklemi  $trA = (A_4 + A_1)$  ve  $\det A = A_5$  olmak şartıyla

$$\lambda^2 - (trA)\lambda + \det A = 0.$$

$$\frac{1}{(1 + \alpha\delta)^2} [\delta(2 + \alpha\delta) - (1 + \alpha\delta)^2(1 + \beta\delta)] = trA$$

$$\delta(2 + \alpha\delta) - (1 + \alpha\delta)^2(1 + \beta\delta) < 0,$$

$$\delta(2 + \alpha\delta) < (1 + \alpha\delta)^2(1 + \beta\delta)$$

olduğundan  $trA < 0$  ve  $\det A > 0$ . Buradan aşağıdaki koşulları elde ederiz.

$$i) 1 + \alpha\delta > \delta$$

$$ii) \delta(2 + \alpha\delta) < (1 + \alpha\delta)^2(1 + \beta\delta).$$

(3.2) lineer sisteminin  $(0,0)$  noktasındaki kararlılığı, (3.3) karakteristik denkleminin köklerine bağlıdır. Bu nedenle (3.3) transandantal denkleminin köklerinin durumu incelenir ise bu köklerin sürekli bağımlılığından ve Routh-Hurwitz kriterinden en az bir  $\tau_0 > 0$  vardır ki  $\tau \in [0, \tau_0)$  için  $\text{Re}(\tau) < 0$ .  $\text{Re} \lambda(z) = 0$  olduğunda  $E_0^*$  asimptotik kararlılığını kaybettiğinden  $\text{Re} \lambda(z^*) = 0$  olacak şekilde bir  $z^* > 0$ 'ın olup olmadığı incelenir. Yani, (3.3) denkleminin sırf sanal olan köklerinin olup olmadığı araştırılır.

Bu bölümde ilk olarak denge noktasının lokal kararlılığı incelenir.  $\tau = \tau^*$  için  $w > 0$  gerçel olmak üzere  $\lambda = iw$  kabul edildiğinde aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir.

**Yardımcı teorem 3.1:** (3.1) sistemi için, (3.3) transandantal denklemi sırf sanal

köke sahiptir.

**İspat:**  $\tau = \tau^*$  ve  $w$  gerçel kök olmak üzere  $\lambda = iw$ , (3.3) transandantal denkleminde yerine yazılırsa genellikle birşey kaybetmeden  $w > 0$  alınabilir. Böylece

$$(iw)^2 - A_1 iw + A_2 A_3 e^{-iw\tau} = 0$$

elde edilir. Yani

$$-w^2 - A_1 iw + A_2 A_3 \cos(w\tau) - A_2 A_3 i \sin(w\tau) = 0$$

Bu eşitliğin gerçel ve sanal kısımlarını ayrı ayrı yazarsak

$$A_2 A_3 \cos(w\tau) = w^2 \quad (3.4)$$

$$A_2 A_3 \sin(w\tau) = -A_1 w \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) eşitliklerin de her iki tarafın kareleri alınıp taraf tarafa topladığında

$$w^4 + A_1^2 w^2 - A_2^2 A_3^2 = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemde yazıldığında

$$w^2 = z \quad p = A_1^2$$

olmak üzere

$$f(z) = z^2 + qz + r = 0$$

denklemini elde edilir.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  ve  $r = -A_2^2 A_3^2 < 0$  olduğundan bu denklemin en az bir tane pozitif kökü

vardır. O halde genellikle birşey kaybetmeden bu pozitif köklerden biri  $z_k$  yani

$w_k = \sqrt{z_k}$  olsun.

$$\sin(w\tau) = -\frac{A_1 w}{A_2 A_3}$$

ve

$$\cos(w\tau) = \frac{w^2}{A_2 A_3}$$

eşitliklerinden

$$\tan(w\tau) = -\frac{A_1}{w}$$

$$\tau_k = \frac{1}{w} \left\{ \arctan\left(-\frac{A_1}{w}\right) + 2k\pi \right\} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$



Şeklinde bulunur. Böylece (3.3) denkleminin sırf sanal köke sahip olduğu bulunmuş olur. Böylelikle Yardımcı Teorem (3.1) 'in ispatı tamamlanır.

**Yardımcı Teorem 3.2:**  $f'(z) \neq 0$  olduğunu varsayalım, bu durumda aşağıdaki transversalite şartı elde edilir;

$$\frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau_k)}{d \lambda} > 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$f'(z)$  ve  $\frac{d \operatorname{Re} \lambda(\tau_k)}{d \tau}$  aynı işarete sahiptir. Yani,  $(1^*)$  sistemi için  $\tau = \tau_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  iken  $E_0^* = (N_0^*, P_0^*)$  pozitif denge noktasında Hopf çatallanma olur.

**İspat:**  $w$  gerçel ve genellikle birşey kaybetmeden  $w > 0$  alınarak  $\lambda = iw$  'yi  $\tau = \tau_k$  için (3.3) denkleminin bir kökü olarak alalım. (3.3) karakteristik denkleminin  $\tau$  'ya göre türevi alınırsa,

$$2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} - A_1 \frac{d\lambda}{d\tau} + [e^{-\lambda\tau} (-\frac{d\lambda}{d\tau}\tau - \lambda)] A_2 A_3 = 0,$$

denklemini elde edilir. Yani

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda - A_1}{A_2 A_3 \lambda e^{-\lambda\tau}} - \frac{\tau}{\lambda}$$

olur.

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda - A_1}{A_2 A_3 \lambda e^{-\lambda iw}} - \frac{\tau}{iw}$$

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \operatorname{Re} \left[ \frac{2iw \cos(w\tau) - 2w \sin(w\tau) - A_1 \cos(w\tau) - A_1 i \sin(w\tau)}{A_2 A_3 iw} \right]$$

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{2A_2 A_3 w^2 \cos(w\tau) - A_1 A_2 A_3 w \sin(w\tau)}{A_2^2 A_3^2 w^2}$$

$\cos(w\tau)$  ve  $\sin(w\tau)$  değerleri yerlerine yazıldığında

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{2w^4 + A_1^2 w}{A_2^2 A_3^2 w^2}$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} \Big|_{\lambda=i\nu} > 0$$

eşitsizliği bulunur. Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa sistemin kararlılığı ve Hopf çatallanma aşağıdaki teoremle verilebilir.

**Teorem 3.2:**  $(1^*)$  sistemi için,

- i. Eğer  $\tau \in [0, \tau_0)$  ise sistemin  $E_0^* = (x_0^*, y_0^*)$  denge noktası asimptotik karardır.
- ii. Eğer  $\tau > \tau_0$  ise sistemin  $E_0^* = (x_0^*, y_0^*)$  denge noktası kararsızdır.
- iii. Eğer  $\tau = \tau_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) ise sistemin  $E_0^* = (x_0^*, y_0^*)$  denge noktasında Hopf çatallanma meydana gelir.

#### 4. HOPF ÇATALLANMANIN YÖNÜ VE KARARLILIĞI

Bu bölümde Normal Form Teorisi ve Center Manifold Teoremi kullanılarak Hopf çatallanmanın yönü, periyodik çözümlerin kararlılığı ve periyodu incelenecektir. Burada Hopf  $(1^*)$  sisteminin  $\tau = \tau_k$  için  $E_0^* = (x_0^*, y_0^*)$  pozitif denge noktasına sahip olduğu kabul edilecektir ve  $w > 0$  olmak üzere  $\lambda = iw$ ,  $E_0^* = (x_0^*, y_0^*)$  pozitif denge noktasında karakteristik denklemin sıfır sanal köküdür.

$\mu \in \mathbb{R}$  için  $\tau = \tau_k + \mu$  yazılırsa  $\mu = 0$  da  $(1^*)$  sisteminin Hopf çatallanma

parametresi olur.  $x_1 = x - x_0^*$ ,  $x_2 = y - y_0^*$ ,  $t = \frac{t}{\tau}$ ,  $\tau = \tau_k + \mu$

değişken değiştirilmesi yapıldığında,  $C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ 'de

$$\dot{x}(t) = L_\mu(x_t) + f(\mu, x_t).$$

Burada  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$  ve  $L_\mu : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^2$  için

$$L_\mu(x_t) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} + (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & -A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

yazılır. Buradan,  $f(\mu, \phi) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix}$ ,

$$f_{11} = -r\phi_1^2(0) - r\phi_1(0)\phi_2(-1) - b\phi_1(0)\phi_2(-1)$$

ve

$$f_{12} = b\phi_1(0)\phi_2(-1)e^{-n\tau}$$

elde edilir. Riesz Gösterim Teoremine göre  $\theta \in [-1, 0]$  için, elemanları sınırlı değişimli  $2 \times 2$  tipinde bir  $\eta(\theta, \mu)$  matris fonksiyonu vardır öyle ki,

$$L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, 0)\phi(\theta), \phi \in C$$

şeklinde yazılabilir.  $\eta(\theta, \mu)$  fonksiyonu,  $\delta =$  Dirac Delta Fonksiyonu olmak üzere,

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} \delta(\theta) + (\tau_k + \mu) \begin{bmatrix} 0 & -A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \delta(\theta + 1)$$

şeklinde seçilirse,  $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$  için

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} -\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\mu, s)\phi(s), & \theta = 0 \end{cases}$$

ve

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0 \end{cases}$$

formunda tanımlanır. Böylece

$$x'(t) = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t \quad (4.3)$$

şeklinde yazılır. Burada  $\theta \in [-1, 0)$  için  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ .  $\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^2)^*)$  için

$$A^*\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 d\eta^T(t, 0)\psi(-t), & s = 0 \end{cases}$$

ve  $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$  iken bilineer iç çarpım

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi, \quad (4.4)$$

olarak tanımlanır.

**Yardımcı Teorem 4.1:**  $A(0)$  and  $A^*$  adjoint operatörlerdir.

**İspat:**  $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$  ve  $\psi \in C^1([-1, 0], (\mathbb{R}^2)^*)$  iken (4.4),  $A(0)$  ve  $A^*$ 'in tanımından

$$\langle \psi(s), A(0)\phi(\theta) \rangle = \langle A^*\psi(s), \phi(\theta) \rangle$$

olduğu gösterilirse,

$$\begin{aligned} \langle \psi(s), A(0)\phi(\theta) \rangle &= \bar{\psi}(0)A\theta(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)A(0)\phi(\xi) d\xi \\ &= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\ &= \bar{\psi}(0) \int_{-1}^0 d\eta(s)\phi(s) - \int_{-1}^0 [\bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi)]_{\xi=0}^{\theta} \\ &\quad + \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \frac{d\bar{\psi}(\xi - \theta)}{d\xi} d\eta(\theta)\phi(\xi) \\ &= \int_{-1}^0 \bar{\psi}(-\theta) d\eta(\theta)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \left( \frac{d\bar{\psi}(\xi - \theta)}{d\xi} \right) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \\ &= A^*\bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} A^*\bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) \\ &= \langle A^*\psi(s), \phi(\theta) \rangle \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Böylece  $A(0)$  ve  $A^*$ 'ın adjoint operatörleri olduğu gösterilmiş ve ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca  $\pm iw \tau_k$ ,  $A(0)$ 'ın özdeğerleridir.  $A(0)$ 'ın  $iw \tau_k$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $q(\theta)$  ve  $A^*$ 'ın  $-iw \tau_k$  özdeğerine karşılık gelen özvektörü  $q^*(s)$ . Yani,

$$A(0) q(\theta) = iw \tau_k q(\theta)$$

ve

$$A^* q^*(s) = -iw \tau_k q^*(s).$$

O halde  $q(\theta)$  ve  $q^*(s)$  özvektörleri bulunur.

$$A(0) q(\theta) = iw \tau_k q(\theta) \rightarrow A(0) q(0) = iw \tau_k q(0)$$

eşitliğinde  $A(0)$  ve  $q(0)$  değerleri yerine yazıldığında,

$$\tau_k \begin{bmatrix} A_1 + iw & A_3 \\ -A_2 e^{iw \tau_k} & A_4 e^{iw \tau_k} + iw \end{bmatrix} q(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde

$$q(\theta) = (1, \alpha)^T e^{iw \tau_k \theta}$$

bulunur.

$\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ , olabilmesi için bilineer iç çarpımın tanımından

$$\begin{aligned} \langle q^*(\theta), q(\theta) \rangle &= \overline{D}(\overline{\alpha}^*, 1)(1, \alpha)^T - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \overline{D}(\overline{\alpha}^*, 1) e^{iw \tau_k (\xi - \theta)} d\eta(\theta) (1, \alpha)^T e^{iw \tau_k \xi} d\xi \\ &= \overline{D} \left\{ \alpha + \overline{\alpha}^* - \int_{-1}^0 (\overline{\alpha}^*, 1) e^{iw \tau_k \theta} \theta d\eta(\theta) (1, \alpha)^T \right\} \\ &= \overline{D} \left\{ \alpha + \overline{\alpha}^* + \tau_k e^{-iw \tau_k} (A_1 \overline{\alpha}^* + A_3) \right\} \\ \overline{D} &= \frac{1}{\alpha + \overline{\alpha}^* + \tau_k e^{-iw \tau_k} (A_1 \overline{\alpha}^* + A_3)} \end{aligned}$$

şeklinde  $\overline{D}$  elde edilmiş olur. Yani,  $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$  ve  $\langle q^*(s), \overline{q}(\theta) \rangle = 0$  eşitlikleri elde edilmiş olur.

$\mu = 0$  iken Center Manifold'u tanımlamak için önce koordinatlar hesaplanmalıdır.

Bunun için,

$$z(t) = \langle q^*, x_t \rangle \quad (4.5)$$

ve

$$W(t, \theta) = x_t - 2 \operatorname{Re} z(t)q(\theta) \quad (4.6)$$

eşitliklerini tanımlansın  $z$ ,  $\bar{z}$  ve  $q$ ,  $q^*$  vektörleri yönünde  $C_0$  Center Manifold'unun lokal koordinatlar olmak üzere

$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (4.7)$$

(4.7) eşitliği hesaplanır. (4.1) sisteminin  $\mu = 0$  iken  $x_t \in C_0$  çözümü için (4.3) denkleminde

$$\dot{x}_t = A(0)x_t + R(0)x_t.$$

$R(\mu)$ 'nin tanımından, Yardımcı Teorem 4.1'den, (4.5) ve (4.6) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \langle q^*, \dot{x}_t \rangle = \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle \\ &= \langle q^*, Ax_t \rangle + \langle q^*, Rx_t \rangle \\ &= \langle A^* q^*, x_t \rangle + \bar{q}^*(0) Rx_t(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{q}^*(\xi - \theta) d\eta(\theta) Rx_t(\xi) d\xi \\ &= iw_0 z + \bar{q}^*(0) f(x_t(0), \mu) \\ \dot{z}(t) &= iw_0 z(t) + \bar{q}^*(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir.

Kuznetsov, Y.'dan (1981) hatırlanacağı üzere Hopf çatallanmanın normal formunun

$$\dot{z} = iw \tau_k z(t) + g(z, \bar{z})$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Burada

$$g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots$$

Bu durumda

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z(t), \bar{z}(t))$$

eşitliği geçerlidir.  $\dot{W}(t, \theta)$  hesaplandığında,

$$W(t, \theta) = x_t - 2 \operatorname{Re} z(t)q(\theta)$$

$$\dot{W}(t, \theta) = \dot{x}_t - 2 \operatorname{Re} \dot{z}(t)q(\theta)$$

$$\begin{aligned} &= [Ax_t + Rx_t] - 2 \operatorname{Re} \left( [iw_0 z(t) + \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z})] q(\theta) \right) \\ &= A[w(t, \theta) + 2 \operatorname{Re} \{z(t)q(\theta)\}] + Rx_t - 2 \operatorname{Re} (iw_0 z(t)q(\theta)) - 2 \operatorname{Re} (\bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z})q(\theta)) \\ &= Aw + 2 \operatorname{Re} (zAq(\theta)) + Rx_t - 2 \operatorname{Re} (iw_0 z(t)q(\theta)) - 2 \operatorname{Re} (\bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z})q(\theta)) \\ &= Aw + 2 \operatorname{Re} (ziw_0 q(\theta)) + Rx_t - 2 \operatorname{Re} (iw_0 z(t)q(\theta)) - 2 \operatorname{Re} (\bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z})q(\theta)) \\ &= Aw + Rx_t - 2 \operatorname{Re} (\bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z})q(\theta)) \end{aligned}$$

$$\dot{W} = \dot{W}(t, \theta) = \begin{cases} AW - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) \}, & \theta \in [-1, 0) \\ AW - 2 \operatorname{Re} \{ \bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) \} + f_0 & \theta = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

olarak bulunur.

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (4.10)$$

olmak üzere

$$\dot{W} = AW + H(z, \bar{z}, \theta), \quad (4.11)$$

$$AW - \dot{W} = -H(z, \bar{z}, \theta) \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlansın.

$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

olduğu bilinmektedir. Bunu kullanarak  $\dot{W}(t, \theta)$  yeni bir formda hesaplanmalıdır.

$$\dot{W} = W_z \dot{z} + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}} \quad (*)$$

(\*) ifadesindeki eşitlik,  $z$  ve  $\bar{z}$  'a göre türevlenirse,

$$W_z = W_{20}(\theta)z + W_{11}(\theta)\bar{z} + W_{30}(\theta) \frac{z^2}{3} + \dots, \quad (**)$$

$$W_{\bar{z}} = W_{11}(\theta)z + W_{02}(\theta)\bar{z}$$

elde edilir. (\*\*) ifadesi (\*)'da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \dot{W} &= W_{20}(\theta)z\dot{\bar{z}} + W_{11}(\theta)(\dot{z}\bar{z} + z\dot{\bar{z}}) + W_{02}(\theta)\bar{z}\dot{\bar{z}} + \dots \\ &= W_{20}(\theta)z\{iw_0 z + g(z, \bar{z})\} \\ &\quad + W_{11}(\theta)[\bar{z}(iw_0 z + g(z, \bar{z})) + z(iw_0 \bar{z} + \bar{g}(z, \bar{z}))] + \dots \\ &= \frac{z^2}{2} 2iw_0 W_{20}(\theta) + \dots \end{aligned}$$

elde edilir.  $W_{ij}$  ve  $H_{ij}$  katsayıları arasında bir ilişki kurabilmek için (4.12)

eşitliğinin sağ tarafı hesaplanmalıdır.

$$AW(t, \theta) = AW_{20}(t, \theta) \frac{z^2}{2} + AW_{11}(t, \theta) z\bar{z} + AW_{20}(t, \theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots,$$

$$AW(t, \theta) - \dot{W} = (A - 2i\omega\tau_k)W_{20} \frac{z^2}{2} + AW_{11} z\bar{z} + \dots$$

şeklinde olur. O halde

$$\begin{aligned} (A - 2i\omega\tau_k)W_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta), \\ AW_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta) \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklinde katsayıları eşitlenebilir. (4.9) 'da verilen ifadelerden ise  $\theta \in [-1, 0)$  için

$$\begin{aligned} H(z, \bar{z}, \theta) &= -\left[ \bar{q}^*(0) f_0 q(\theta) + \overline{\bar{q}^*(0) f_0 q(\theta)} \right] \\ &= -\left[ g(z, \bar{z}) q(\theta) + \bar{g}(z, \bar{z}) \bar{q}(\theta) \right] \\ &= \left[ \begin{aligned} & q(\theta) \left( g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \right) \\ & + \bar{q}(\theta) \left( \bar{g}_{20} \frac{\bar{z}^2}{2} + \bar{g}_{11} z\bar{z} + \bar{g}_{02} \frac{z^2}{2} + \dots \right) \end{aligned} \right] \\ &= -\left[ q(\theta) g_{20} + \bar{q}(\theta) \bar{g}_{02} \right] \frac{z^2}{2} \\ &\quad - \left[ q(\theta) g_{11} + \bar{q}(\theta) \bar{g}_{11} \right] z\bar{z} - \left[ q(\theta) g_{02} + \bar{q}(\theta) \bar{g}_{20} \right] \frac{\bar{z}^2}{2} - \dots \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} H_{20}(\theta) &= -\left[ q(\theta) g_{20} + \bar{q}(\theta) \bar{g}_{02} \right], \\ H_{11}(\theta) &= -\left[ q(\theta) g_{11} + \bar{q}(\theta) \bar{g}_{11} \right], \\ H_{02}(\theta) &= -\left[ q(\theta) g_{02} + \bar{q}(\theta) \bar{g}_{20} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklinde elde edilir.  $H_{ij}(\theta)$  katsayılarını belirleyebilmek için  $g_{ij}$  ve  $\bar{g}_{ij}$  katsayıları hesaplanmalıdır. Daha önceden gösterildiği gibi

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z(t), \bar{z}(t)).$$

Öyleyse

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \quad (4.15)$$

şeklinde yazılabilir. (4.5) ve (4.6) 'yı kullanarak

$$x_r(x_{1r}(\theta), x_{2r}(\theta)) = W(t, \theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta), \quad q(\theta) = (1, \alpha)^T e^{i\omega\tau_k\theta} \text{ ve}$$



$$\begin{aligned}
x_{1t}(0) &= z + \bar{z} + W_{20}^1(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^1(0) z\bar{z} + W_{02}^1(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\
x_{2t}(0) &= z\alpha + \bar{z}\bar{\alpha} + W_{20}^2(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^2(0) z\bar{z} + W_{02}^2(0) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\
x_{1t}(-1) &= ze^{-i\nu\tau_k\theta} + \bar{z}e^{i\nu\tau_k\theta} + W_{20}^1(-1) \frac{z^2}{2} + W_{11}^1(-1) z\bar{z} + W_{02}^1(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3), \\
x_{2t}(-1) &= z\alpha e^{-i\nu\tau_k\theta} + \bar{z}\bar{\alpha} e^{i\nu\tau_k\theta} + W_{20}^2(-1) \frac{z^2}{2} + W_{11}^2(-1) z\bar{z} + W_{02}^2(-1) \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z, \bar{z}|^3),
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.  $f(\mu, x_t)$  'nin tanımından

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z}) = \overline{D\tau_k}(\bar{\alpha}^*, 1) \begin{bmatrix} f_{11}^0 \\ f_{12}^0 \end{bmatrix}$$

burada  $f_{11}^0 = -rx_{1t}^2(0) - rx_{1t}(0)x_{2t}(-1) - bx_{1t}(0)x_{2t}(-1)$

ve

$$f_{12}^0 = bx_{1t}(0)x_{2t}(-1)e^{-n\tau}$$

kullanarak yazılır. Buna göre

$$g(z, \bar{z}) = \overline{D\tau_k}(\bar{\alpha}^*, 1) \begin{bmatrix} -rx_{1t}^2(0) - rx_{1t}(0)x_{2t}(-1) - bx_{1t}(0)x_{2t}(-1) \\ bx_{1t}(0)x_{2t}(-1)e^{-n\tau} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0) f_0(z, \bar{z})$  ve  $g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2\bar{z}}{2} + \dots$  denklemlerinin sağ tarafları birbirine eşitlendiğinde;

$$g_{20} = 2\overline{D\tau_k}(-r\bar{\alpha}^* - r\bar{\alpha}^*\alpha e^{-i\nu\tau_k\theta} - b\bar{\alpha}^*\alpha e^{-i\nu\tau_k\theta} + b\alpha e^{i\nu\tau_k\theta} e^{-n\tau}),$$

$$g_{02} = 2\overline{D\tau_k}(-r\bar{\alpha}^* - r\bar{\alpha}^*\bar{\alpha} e^{i\nu\tau_k\theta} - b\bar{\alpha}^*\bar{\alpha} e^{i\nu\tau_k\theta} + b\bar{\alpha} e^{i\nu\tau_k\theta} e^{-n\tau}),$$

$$g_{21} = \frac{1}{2} \overline{D\tau_k} \begin{bmatrix} -4r\bar{\alpha}^* W_{11}^1(0) - 2r\bar{\alpha}^* W_{11}^2(-1) - 2r\bar{\alpha}^* \alpha W_{11}^1(0) e^{-i\nu\tau_k\theta} \\ -2b\bar{\alpha}^* W_{11}^2(-1) - 2b\bar{\alpha}^* \alpha W_{11}^1(0) e^{-i\nu\tau_k\theta} + 2bW_{11}^2(-1) e^{-n\tau} \\ + 2b\alpha W_{11}^1(0) e^{-i\nu\tau_k\theta} e^{-n\tau} - r\bar{\alpha}^* W_{20}^1(0) - r\bar{\alpha}^* W_{20}^1(0) \\ -r\bar{\alpha}^* \bar{\alpha} W_{20}^1(0) e^{-i\nu\tau_k\theta} - r\bar{\alpha}^* W_{20}^2(-1) \end{bmatrix},$$

$$g_{11} = \overline{D\tau_k} \left( \begin{array}{l} -2r\overline{\alpha}^* - r\overline{\alpha}^* \overline{\alpha} e^{i\omega\tau_k\theta} - r\overline{\alpha}^* \alpha e^{-i\omega\tau_k\theta} - b\overline{\alpha}^* \overline{\alpha} e^{i\omega\tau_k\theta} \\ -b\overline{\alpha}^* \alpha e^{-i\omega\tau_k\theta} + b\overline{\alpha} e^{i\omega\tau_k\theta} e^{-n\tau} + b\alpha e^{-i\omega\tau_k\theta} e^{-n\tau} \end{array} \right)$$

katsayıları bulunmuş olur.

$g_{21}$  hesaplayabilmek için  $W_{20}(\theta)$  ve  $W_{11}(\theta)$  'yı hesaplamak gerekir. O halde

$$\begin{aligned} W' &= x_t' - z'q - \overline{z'q} \\ &= \begin{cases} AW - 2 \operatorname{Re}(\overline{q}^*(0) f_0 q(\theta)), & \theta \in [-1, 0) \\ AW - 2 \operatorname{Re}(\overline{q}^*(0) f_0 q(\theta)) + f_0, & \theta = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{def}{=} AW + H(z, \overline{z}, \theta) \end{aligned}$$

burada

$$H(z, \overline{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\overline{z} + H_{02}(\theta) \frac{\overline{z}^2}{2} + \dots,$$

$$(A - 2i\omega\tau_k)W_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta), \quad AW_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta)$$

ve  $\theta \in [-1, 0)$  için

$$H(z, \overline{z}, \theta) = \overline{q}^*(0) f_0 q(\theta) - q^*(0) f_0(0) \overline{q}(\theta) = -gq(\theta) - \overline{g}\overline{q}(\theta),$$

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \overline{g}_{02}\overline{q}(\theta), \quad H_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \overline{g}_{11}\overline{q}(\theta)$$

eşitliklerinde

$$\dot{W}_{20}(\theta) = 2i\omega\tau_k W_{20}(\theta) - g_{20}q(\theta) - \overline{g}_{02}\overline{q}(\theta)$$

olur.

$q(\theta) = q(0)e^{i\omega\tau_k\theta}$  olduğundan

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\tau_k\omega} q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\overline{g}_{02}}{3\tau_k\omega} \overline{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_1 e^{2i\omega\tau_k\theta}, \quad (4.16)$$

bulunur. Burada  $E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)}) \in R^2$  sabit vektördür. Benzer yolla

$$W_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}}{\tau_k\omega} q(0)e^{i\omega\tau_k\theta} + \frac{i\overline{g}_{11}}{\tau_k\omega} \overline{q}(0)e^{-i\omega\tau_k\theta} + E_2, \quad (4.17)$$

elde edilir. Burada  $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)}) \in R^2$  sabit vektördür. Şimdi  $E_1$  ve  $E_2$

bulunmalıdır.  $A$  'nın tanımından ve (4.13) 'den

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{20}(\theta) = 2iw\tau_k W_{20}(0) - H_{20}(0), \quad (4.18)$$

ve

$$\int_{-1}^0 d\eta(\theta)W_{11}(\theta) = -H_{11}(0), \quad (4.19)$$

$d\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$  olmak üzere (4.18) ve (4.19) denklemleri bulunur. (\*) ve (4.9)'dan

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + 2\tau_k \begin{bmatrix} -r - re^{iw\tau_k\theta} - be^{iw\tau_k\theta} \\ be^{-n\tau}e^{iw\tau_k\theta} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

ve

$$H_{11}(\theta) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + 2\tau_k \begin{bmatrix} -2r - b \\ be^{-n\tau} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

şeklinde yazılır. (4.18) ve (4.20)'den

$$\begin{aligned} \left( iw\tau_k I - \int_{-1}^0 e^{iw\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) q(0) &= 0, \\ \left( -iw\tau_k I - \int_{-1}^0 e^{-iw\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) q(0) &= 0 \end{aligned}$$

yardımları ile

$$\left( 2iw\tau_k I - \int_{-1}^0 e^{2iw\tau_k\theta} d\eta(\theta) \right) E_1 = 2\tau_k \begin{bmatrix} -r - re^{iw\tau_k\theta} - be^{iw\tau_k\theta} \\ be^{-n\tau}e^{iw\tau_k\theta} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A_1 + iw & A_3 \\ -A_2 e^{iw\tau_k} & A_4 e^{iw\tau_k} + iw \end{bmatrix} E_1 = 2 \begin{bmatrix} -r - re^{iw\tau_k\theta} - be^{iw\tau_k\theta} \\ be^{-n\tau}e^{iw\tau_k\theta} \end{bmatrix}$$

elde edilir.  $E_1$ 'i bulmak için bu sistem çözüldüğünde;

$$E_1 = 2 \begin{bmatrix} A_1 + iw & A_3 \\ -A_2 e^{iw\tau_k} & A_4 e^{iw\tau_k} + iw \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -r - re^{iw\tau_k\theta} - be^{iw\tau_k\theta} \\ be^{-n\tau}e^{iw\tau_k\theta} \end{bmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$E_2 = \begin{bmatrix} A_1 + iw & A_3 \\ -A_2 e^{iw\tau_k} & A_4 e^{iw\tau_k} + iw \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2r - b \\ be^{-n\tau} \end{bmatrix}$$

bulunur.

Böylece Center Manifold'da  $\tau_k$  kritik değerindeki çatallanan periyodik çözümlerin çatallanma katsayıları

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega\tau_k} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3}) + \frac{g_{21}}{2},$$

$$\mu_2 = -\frac{\text{Re}\{c_1(0)\}}{\text{Re}\{\lambda'(\tau_k)\}},$$

$$\beta_2 = 2\text{Re}\{c_1(0)\},$$

$$T_2 = -\frac{\text{Im}\{c_1(0)\} + \mu_2 \text{Im}\{\lambda'(\tau_k)\}}{\omega\tau_k}$$

şeklinde belirlenir. Burada  $\mu_2$ ; Hopf çatallanmanın yönünü,  $\beta_2$ ; çatallanan periyodik çözümün kararlılığını ve  $T_2$ ; çatallanan çözümün periyodunu ifade eder. Bu bilgilerle aşağıdaki teorem verilir.

**Teorem 4.1:** Hopf çatallanmanın yönünü belirleyen  $\mu_2$  için; eğer  $\mu_2 > 0$  ise  $\tau > \tau_0$  için çatallanan periyodik çözüm vardır ve Hopf çatallanma süperkritiktir,  $\mu_2 < 0$  ise  $\tau < \tau_0$  için çatallanan periyodik çözüm vardır ve Hopf çatallanma subkritiktir. Çatallanan periyodik çözümün kararlılığını belirleyen  $\beta_2$  için;  $\beta_2 < 0$  ise çatallanan periyodik çözüm kararlı,  $\beta_2 > 0$  ise kararsızdır. Çatallanan çözümün periyodunu ifade eden  $T_2$  için ;  $T_2 < 0$  iken periyot artar,  $T_2 > 0$  iken periyot azalır.

## KAYNAKÇA

### *Kitaplar*

Hassard, N.D. & Kazarino, Y.H., 1981. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge: Cambridge University Press.

Kuang, Y., 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Boston: Academic Press.

May, R.M., 1973. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, New Jersey, USA: Princeton University Press.

Murray, J.D., 1993 *Mathematical Biology*, New York: Springer -Verlag Press.

### ***Süreli Yayınlar***

- Chen, G. & Liao, X., 2005. Hopf bifurcation and chaos analysis of Chen's system with distributed delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, **25**, pp.197-220.
- Chen, L. & Teng, Z., 2006. Analysis of a predator-prey model with Holling II functional response concerning impulsive control strategy, *J. Comput. Appl. Math.*, **193**, pp.347-362.
- Chen, X., 2007. Periodicity in a nonlinear discrete predator-prey system with state dependent delays, *Nonlinear Anal. RWA*, **8**, pp.435-446.
- Chen, Y., Sun, C., Han, M. & Lin, Y., 2007. Global qualitative analysis for a predator-prey system with delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, **32**, pp.1582-1596.
- Choudhury, SR. & Krise, S., 2003. Bifurcations and chaos in a predator-prey model with delay and a laser-diode system with self-sustained pulsations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **16**, pp.59-77.
- Çelik, C. & Duman, O., 2009. Allee effect in a discrete-time predator-prey system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **40**(4), pp.1956-1962.
- Çelik, C., 2008. The stability & Hopf bifurcation for a predator-prey system with time delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, **37**, pp.87-99.
- Çelik, C., 2009. Hopf bifurcation of a ratio-dependent predator-prey system with time delay, *Chaos, Solitons & Fractals*, **42**, pp.1474-1484.
- Çelik, C., 2011. Dynamical behavior of a ratio dependent predator-prey model with distributed delay, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, **16**(3), pp.719-738.
- Fowler, M. S. & Ruxton, G. D., 2002. Population dynamic consequences of Allee effects, *J. Theor. Biol.*, **215**, pp.39-46.
- Gopalsamy, K., 1980. Time lags and global stability in two species competition, *Bull Math Biol*, **42**, pp.728-737.

- Hadjiavgousti, D. & Ichtiaroglou, S., 2008. Allee effect in a predator-prey system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **36**, pp.334-342.
- He, X., 1996. Stability and delays in a predator--prey system, *J. Math. Anal. Appl.*, **198**, pp.355-370.
- Jang, J., 2006. Allee effects in a discrete-time host-parasitoid model, *J. Diff. Equ. Appl.*, **12**, pp.165-181.
- Jiang, G. & Lu, Q., 2007. Impulsive state feedback of a predator-prey model, *J. Comput. Appl. Math.*, **200**, pp.193-207.
- Leung, A., 1977. Periodic solutions for a prey--predator differential delay equation, *J. Differential Equations*, **26**, pp.391-403.
- Li, T., Fei, S., Zhang, K. & Yu, J., 2008. Simplified exponential stability analysis for recurrent neural networks with discrete and distributed time-varying delays, *Applied Mathematics and Computation*, **205**, pp.465-474.
- Liu, X. & Xiao, D., 2007. Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator-prey system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **32**, pp.80-94.
- Liu, Y. F., Zhou, S. R. & Wang, G., 2005. The stability of predator-prey systems subject to the Allee effects, *Theor. Population Biol.*, **67**, pp.23-31.
- Ma, W. & Takeuchi, Y., 1998. Stability analysis on a predator-prey system with distributed delays, *J. Comput. Appl. Math.*, **88**, pp.79-94.
- McCarthy, M. A., 1997. The Allee effect, finding mates and theoretical models, *Ecological Modelling*, **103**, pp.99-102.
- Ruan, S. & Wei, J., 1999. Periodic solutions of planar systems with two delays, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **129**, pp.1017-1032.
- Ruan, S., 2001. Absolute stability, conditional stability and bifurcation in Kolmogorov-type predator--prey systems with discrete delays, *Quart. Appl. Math.*, **59**, pp.159-173.

- Saha, T. & Chakrabarti, C., 2009. Ratio dependent predator-prey model with delay, *J. of Math. Analysis and Appl.*, **358**, pp. 389-402
- Scheuring, I., 1999. Allee effect increases the dynamical stability of populations, *J. Theor Biol.*, **199**, pp.407-414.
- Tang, Y. & Zhou, L., 2002. Stability and Hopf bifurcation for a delay competition diffusion system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **14**, pp.1201-1225.
- Wang, F. & Zeng, G., 2007. Chaos in Lotka-Volterra predator-prey system with periodically impulsive ratio-harvesting the prey and time delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, **32**, pp.1499-1512.
- Wang, L., Li, T. & Zhao, H., 2004. Existence and global stability of positive periodic solutions of a discrete predator-prey system with delays, *Adv. Difference Equ.*, **4**, pp.321-336.
- Wang, Z. & Wen, X., 2002. The existence of periodic solutions for some models with delay, *Nonlinear Anal. RWA*, **3**, pp.567-581.
- Wang, Z. & Xu, R., 2006. Periodic solutions of a nonautonomous predator-prey system with stage structure and time delays, *J. Comput. Appl. Math.*, **196**, pp.70-86.
- Wu, Y. & Zhou, X., 2009. Stability and Hopf Bifurcation analysis on a two neuron network with discrete and distributed delays, *Chaos, Solitons & Fractals*, **40**, pp.1493-1505.



***Diğer Yayınlar***

[http://en.wikipedia.org/wiki/Bifurcation\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Bifurcation_theory)

“Center Manifold Teoremi” erişim adresi:

[http://en.wikipedia.org/wiki/Center\\_Manifold](http://en.wikipedia.org/wiki/Center_Manifold)

“Bifurcation Theory” erişim adresi