

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Yüksek Lisans Tezi

AYŞE GAMZE ÇETİNKAYA

İSTANBUL, 2014

**T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

Yüksek Lisans Tezi

AYŞE GAMZE ÇETİNKAYA

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU

İSTANBUL, 2014

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

Tezin Adı : Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri
Öğrencinin Adı Soyadı : Ayşe Gamze ÇETİNKAYA
Tez Savunma Tarihi : 12.06.2014

Bu yüksek lisans tezi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

Doç. Dr. Tunç BOZBURA
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU
Program Koordinatörü

Bu tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli bulunmuştur.

_____ Jüri Üyeleri _____

_____ İmzalar _____

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU

Üye

Doç. Dr. Lütfi ARDA

Üye

Yrd. Doç. Dr. Bahri GÜLDOĞAN

TEŐEKKÜR

Bu konuyu benim için seçen, çalışmalarım süresince vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen saygı değer hocam Sayın Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU 'ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tüm eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi hiçbir desteği benden esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İstanbul, 2014

Ayşe Gamze ÇETİNKAYA

ÖZET

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Çetinkaya, Ayşe Gamze

Uygulamalı Matematik Yüksek Lisans Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ersin Özügürlü

Haziran, 2014, 59 sayfa

Bu çalışmada, ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler hakkında kısa bir bilgi verilip, ikinci mertebeden hemen-hemen lineer kısmi diferansiyel denklem türleri ele alındı. Bu denklemleri uygun başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte sayısal olarak çözmek için sonlu farklar metodu kullanıldı. Parabolik türden denklemler için kullanılan sonlu fark metotları için kararlılık analizi yapıldı. Son olarak, seçilmiş örnek problemlerin sayısal çözümünü elde etmek ve bu çözümleri problemlerin analitik çözümleriyle karşılaştırmak için program kodu hazırlandı. Elde edilen çözümlerin h adım uzunluğunun sınırlı değerlerine bağlı olarak kararlı ve yakınsak olduğu ve elde edilen çözüm değerlerinin tablo ve grafik halinde sunumları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Denklem, Parabolik Denklem, Eliptik Denklem, Sonlu Fark Metodu, von Neumann Analizi

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS FOR PARTIAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Çetinkaya, Ayşe Gamze

Graduate Program of Applied Mathematic

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ersin Özüğurlu

June, 2014, 59 pages

In this study, a brief information about the second order partial differential equations is given, and then the second order quasi-linear partial differential equations are considered. The finite-difference methods are used for numerical solutions of these equations with the appropriate initial and boundary conditions. The analysis of stability also is conducted for the finite-difference methods that is used for parabolic differential equations. Finally, the programme codes are written to obtain numerical solutions of the chosen samples, and to compare these solutions with the analytical solutions. It is concluded that these obtained solutions are determined and convergent depending on limited values of h step size. Tables and charts of these obtained values are included.

Keywords: Hyperbolic Equation, Parabolic Equation, Elliptic equation, Finite-Difference Method, Von Neumann Analysis

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR.....	viii
ŞEKİLLER.....	ix
KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ.....	2
3. GENEL BİLGİLER.....	4
3.1 KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GENEL TANIMI.....	4
3.2 KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GENEL BİR SINIFLANDIRMASI.....	5
3.3 İKİNCİ MERTEBEDEN HEMEN-HEMEN LİNEER KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BİR SINIFLANDIRMA.....	6
3.4 TAYLOR TEOREMİ.....	10
3.5 SONLU FARK FORMÜLASYONLARI.....	10
3.6 SONLU FARK DENKLEMLERİ.....	13
4. MATERYAL VE METOT.....	15
4.1 YAKINSAKLIK, TUTARLIK VE KARARLILIK.....	15
4.2 SONLU FARK METODU ANALİZİ.....	15
4.3 HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN SONLU FARK METODU.....	23
4.4 PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN SONLU FARK METODU.....	27
4.5 ELİPTİK DENKLEMLER İÇİN SONLU FARK METODU.....	35
4.6 JACOBI İTERASYON YÖNTEMİ.....	38
5. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	42
5.1 HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÖRNEK.....	42
5.2 PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÖRNEK.....	45
5.3 ELİPTİK DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÖRNEK.....	56
6. SONUÇ.....	59
KAYNAKÇA.....	60
EKLER	
Ek.1 İkinci Mertebeden Denklemler İçin Cauchy Problemi.....	63
Ek.2 Dalga Denklemi İçin Fortran Kodu(AİFM).....	64
Ek.3 Isı Denklemi İçin Fortran Kodu (İAFM).....	67

Ek.4 Isı Denklemi İçin Fortran Kodu (KGFM).....	69
Ek.5 Isı Denklemi İçin Fortran Kodu (CNM).....	71
Ek.6 Laplace Denklemi İçin Fortran Kodu(AİFM).....	73

TABLÖLAR

Tablo 5.1 Dalga denklemleri için AİFM ile elde edilen sonuçlar.....	43
Tablo 5.2 Isı denklemleri için AİFM ile elde edilen sonuçlar.....	46
Tablo 5.3 Isı denklemleri için KGFM ile elde edilen sonuçlar.....	50
Tablo 5.4 Isı denklemleri için CNM ile elde edilen sonuçlar.....	53
Tablo 5.5 Laplace denklemleri için AİFM ile elde edilen sonuçlar.....	58

ŞEKİLLER

Şekil 3.1 Dalga denkleminde ele alınan iki uçta gerilmiş sicim.....	7
Şekil 3.2 Isı denkleminde ele alınan ℓ uzunluklu çubuk.....	8
Şekil 3.3 Laplace denkleminde ele alınan bölge ve sınırı.....	9
Şekil 3.4 Birinci Mertebeden türev formülasyonlarında kullanılan ağ noktaları.....	12
Şekil 4.1 Dalga denklemi AİFM için belli bir adımdaki ağ noktalar.....	25
Şekil 4.2 Isı denklemi AİFM için belli bir adımdaki ağ noktalar.....	30
Şekil 4.3 Isı denklemi KGFM için belli bir adımdaki ağ noktalar.....	33
Şekil 4.4 Poisson denklemi için ağ noktaların gösterimi.....	35
Şekil 4.5 Poisson denklemi AİFM için belli bir adımdaki ağ noktalar.....	37
Şekil 4.6 Poisson denklemindeki bilinmeyenleri içeren ağ noktalarının gösterimi.....	37
Şekil 5.1 : $k = 0.01$, $h = 0.01$ için analitik çözüm (AİFM).....	42
Şekil 5.2 : $k = 0.05$, $h = 0.1$ için hata grafiği(AİFM).....	44
Şekil 5.3 : $k = \frac{0.5}{1000}$, $h = \frac{1}{100}$ için analitik çözüm (AİFM).....	45
Şekil 5.4: $k = \frac{0.5}{1000}$, $h = \frac{1}{10}$ ve $\lambda = 0.05$ için hata grafiği(AİFM).....	47
Şekil 5.5: $k = \frac{0.5}{50}$, $h = \frac{1}{10}$ ve $\lambda = 1.0$ için hata grafiği(AİFM).....	48
Şekil 5.6: $k = \frac{0.5}{50}$, $h = \frac{1}{10}$ ve $\lambda = 1.0$ için yakınlaştırılmış hata grafiği(AİFM).....	49
Şekil 5.7: $k = \frac{0.5}{50}$, $h = \frac{1}{10}$ ve $\lambda = 1.0$ için hata grafiği(KGFM).....	51
Şekil 5.8: $k = \frac{0.5}{50}$, $\lambda = 1.0$ ve $\lambda = 2.25$ için hata grafiği (KGFM).....	52
Şekil 5.9: $k = \frac{0.5}{50}$, $\lambda = 1.0$ için hata grafiği(CNM).....	54
Şekil 5.10: $k = \frac{0.5}{50}$, $\lambda = 1.0$ ve $\lambda = 2.25$ için hata grafiği (CNM).....	55
Şekil 5.11 Laplace denklemindeki bilinmeyenleri içeren ağ noktalarının gösterimi.....	56

KISALTMALAR

Açık İleri Fark Metodu	:	AİFM
Kapalı Geri Fark Metodu	:	KGFM
Sonlu Fark Metodu	:	SFM
Crank- Nicolson Metodu	:	CNM

1. GİRİŞ

Uygulamalı Matematik alanında birçok problem adi ve kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilebilir. Bağımlı ve bağımsız değişkenlerin sürekli birbirlerine bağlı bulunduğu gerçek fiziksel sistemlerde denklemler, olayın meydana geldiği anda ortamın fiziksel özelliklerini belirten parametrelerle ve uygun başlangıç ve sınır koşulları ile ifade edilir. Bu tür problemlerin çözümünde sonlu farklar metodu, çözüm bölgesine bağlı olarak son derece önemli bir yere sahiptir.

Sayısal analiz yöntemleri, fizik ve mühendislik alanlarında karşımıza çıkan ileri düzeyde matematiksel problemleri bilgisayar tabanlı çözmek için kullanılan bir yoldur. Bu sayısal yöntemler, mühendislerin ve temel bilimcilerin ve hatta sosyal bilimcilerin bile kendine özgü problemlerini çözmek için sık sık başvurdukları bir alan haline almıştır. Bu yöntemlerin en büyük avantajı, analitik çözümü olmayan veya bulunmasının çok zor olduğu problemlerin sonuçlarının bu yöntemlerle elde edilebilmesidir. Sayısal metotların sık olarak kullanıldığı alanlardan birisi de diferansiyel denklemlerdir. Bu çalışmada ikinci mertebeden hemen –hemen lineer kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu fark metotları ile çözümü ele alınmıştır. Özel olarak parabolik türden diferansiyel denklemler için açık ve kapalı fark metotlarıyla çözüm incelenmiş ve kararlılık analizleri yapılmıştır. Sayısal çözüm için bilgisayar kodu Fortran dilinde yazılmıştır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Diferansiyel denklemler, uygulamalı matematik alanında fiziksel olayların matematiksel modelleme problemlerinde kullanılmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemler ilk olarak, geometrideki yüzey çalışmaları ve mekanikteki farklı problemlerde ortaya çıkmıştır. Daha sonra yapılan çalışmalarla fiziksel, kimyasal ve biyolojik bir çok olgunun, kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilebileceği ortaya konulmuş ve birçok matematikçi bu denklemlerle ortaya çıkan problemlerle ilgilenmeye başlamışlardır. B. Taylor, D. Bernoulli, L. Euler ve J.D'Alambert gibi matematikçiler, titreşim teorisinde yer alan sınır değer problemleri üzerinde çalışmışlardır. A.L. Cauchy, S. Kowalewski, J.G. Darboux ve J. Hadamard, Cauchy probleminin varlık ve tekliği üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Fiziksel olayların matematiksel ifadesi olan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri, bilgisayar teknolojisindeki ilerlemelere bağlı olarak 20. yüzyılın ilk çeyreğinde başlayarak günümüze kadar devam eden bir süreci oluşturmaktadır. İlk olarak 1928 yılında Courant, Friedrichs ve Lewy matematiksel fizik problemlerinde sonlu fark formüllerini kullanmıştır. Eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin fark formülleri için hata sınırları ilk defa 1930 Gerschgorin tarafından ifade edildi. Bu yaklaşım 1960'lı yıllara kadar Collotz, Motzkin, Wasom, Bramble, Hubbard gibi bilim adamları tarafından kullanılmıştır. Ayrıca birçok eliptik denklem formüllerine buna bağlı olarak sınır koşulları analiz edildi. II. Dünya Savaşı boyunca sonlu farklar yöntemi ile zaman (t) koşullu problemler bilgisayar yardımıyla çözülmüştür. John Von Neumann'ın çalışmaları bu problemlerin çözülmesinde büyük katkı sağlamıştır. 1950'de ise bu çalışmalar O'Brien , Hyman ve Kaplan tarafından yazılmıştır. Parabolik denklemler için John Von Neumann 1951 yılında yeni bir teori geliştirdi. Bu arada 1947 yılında Crank ve Nicholson başlangıç-sınır değer problemler için yeni bir yöntem geliştirmiştir. Lax Denklik Teoremi'nin (kararlılık için) bulunmasıyla, genel başlangıç değer problemleri için sonlu farklar teorisinde ve parabolik denklemlerde 1950 ve 1960 yıllarında bir gelişme kaydedildi. Bu tip denklemlerin özellikle, değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümü, değişken katsayısının varlığı sebebiyle oldukça zordur. Bu nedenle yaklaşık çözüm yöntemlerine gerek duyulur ve bu tür yöntemler ile elde edilen çözümlerde hata ortaya çıkmaktadır. Bu hatanın derecesini bilmek bilimsel açıdan oldukça önemlidir.

Dolayısıyla pratik ve kullanışlı olmanın yanında en iyi yaklaşımı veren çözüm yöntemleri aranır. Analitik çözümün kolaylıkla bulunamadığı denklemlerde yaklaşık çözüm için birçok yöntem denenmiştir. Bunlardan bir tanesi sonlu farklar yöntemi, sayısal yöntemlerin temelini oluşturur. Matematik ve Fizik problemleri çoğu zaman sürekli ve çok değişkenlidirler. Bu problemlerdeki fonksiyonlar bir formül yardımıyla verilebilirler. Bazen bir fonksiyon farklı noktalarda tanımlanmış olabilir. Sonlu farklar yöntemi kullanılarak fonksiyonun diğer noktalardaki değerleri bulunabilir. Bu yöntemin uygulanabildiği problemlerde çözüm için gerekli olan yakınsaklık ve kararlılık analizleri yapılabilmektedir.

3. GENEL BİLGİLER

3.1 KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GENEL TANIMI

Tanım 3.1 (Kısmi Türev): $U : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ olmak üzere $U = F(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)$ biçiminde tanımlanan n tane bağımsız değişkene bağlı U fonksiyonunun diğer değişkenler sabit tutularak herhangi bir değişkenin Δx_m değişimine karşılık fonksiyonun değişim hızı,

$$\frac{\Delta U}{\Delta x_m} = \frac{F(x_1, x_2, \dots, x_m + \Delta x_m, \dots, x_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)}{\Delta x_m} \quad 3.1$$

şeklindedir. Burada $\Delta x_m = h$ diyelim. Eğer (3.2) denkleminin sağ tarafındaki limit mevcut ise,

$$\frac{\partial U}{\partial x_m} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1, x_2, \dots, x_m + h, \dots, x_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)}{h} \quad 3.2$$

ifadesine $U = F(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)$ fonksiyonunun x_m değişkenine göre *kısmi türevi* denir.

Tanım 3.2 En az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre birinci veya daha fazla mertebeden kısmi türevlerini içeren denklemlere *kısmi diferansiyel denklemler* denir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin genel formu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bağımsız değişkenler

olmak ve $U_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1}, U_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, U_{x_n} = \frac{\partial U}{\partial x_n}, U$ bağımlı değişkeninin kısmi

türevlerini göstermek üzere,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}, U_{x_1 x_1}, U_{x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad 3.3$$

şeklindedir.

3.2 KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GENEL SINIFLANDIRILMASI

Kısmi diferansiyel denklemler merteye, lineerlik v.b.özelliklerine göre sınıflandırılırlar. Bir kısmi diferansiyel denklemin mertebesi, denklemden görülen en yüksek mertebeden kısmi türevin mertebesi olarak tanımlanır.

3.2.1 Linear Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bir kısmi diferansiyel denklemden bağımlı değişken (veya değişkenler) ve bunların denklemden bütün kısmi türevleri birinci dereceden ayrıca denklemin, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyor ise, bu denkleme *linear kısmi diferansiyel denklem* denir.

İki bağımsız bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden linear kısmi diferansiyel denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x, y)u_x + Q(x, y)u_y + R(x, y)u = S(x, y)$$

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y)$$

Kısmi diferansiyel denklemlerin daha ileri bir sınıflandırması da vardır.

3.2.2 Yarı Linear Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bir kısmi diferansiyel denklem, denklemden görülen en yüksek mertebeden türevlere göre linear ise denkleme *yarı linear kısmi diferansiyel denklem* denir. Bu durumda denklemden daha düşük mertebeden türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinin herhangi bir önemi yoktur.

İki bağımsız bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden yarı linear kısmi diferansiyel denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x, y, u)u_x + Q(x, y, u)u_y = R(x, y, u)u$$

$$A(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2B(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + C(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} + D(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

3.2.3 Hemen-Hemen Linear Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bir yarı linear kısmi diferansiyel denklemden görülen, en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu ise bu tür denklemlere, *hemen-hemen linear kısmi diferansiyel denklem* denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer kısmi diferansiyel denklemin genel şekli,

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

formundadır.

3.3 İKİNCİ MERTEBEDEN HEMEN-HEMEN LİNEER KİSMİ DENKLEMLER İÇİN BİR SINIFLANDIRMA

İkinci mertebeden,

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad 3.4$$

denklemini göz önüne alalım. Burada A, B ve C; xy- düzleminin bir Ω bölgesinde x ve y nin iki defa sürekli türetilbilir fonksiyonlarıdır ve aynı anda üçünün birden sıfır olmadığını kabul ediyoruz.

Diskriminant fonksiyonunu,

$$\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) \quad 3.5$$

şeklinde tanımlayalım.

Tanım 3.3.1 Eğer Ω nın bir (x_0, y_0) noktasında

$\Delta(x_0, y_0) > 0$ ise, (3.4) denkleminde bu noktada hiperboliktir,

$\Delta(x_0, y_0) = 0$ ise, (3.4) denkleminde bu noktada paraboliktir,

$\Delta(x_0, y_0) < 0$ ise, (3.4) denkleminde bu noktada eliptiktir,

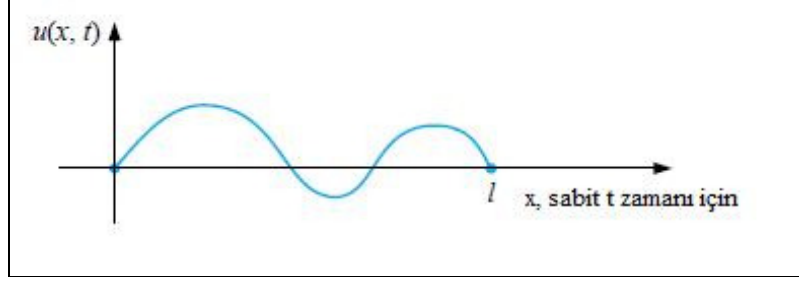
denir. Bir Ω bölgesinin tüm noktalarında hiperbolik, parabolik veya eliptik olan bir denkleme Ω da sırasıyla hiperbolik, parabolik veya eliptiktir denir.

Genellikle bir denklem, katsayılarının tanımlı olduğu bir bölgede her üç tipten de olabilir. Özel olarak A, B ve C katsayıları (yani ikinci mertebeden türevlerin katsayıları) sabit olan bir denklem tüm düzlemde aynı tiptendir.

3.3.1 Hiperbolik Tip

Bölüm 4.3 de ele alınacak problem hiperbolik kısmı diferansiyel denklemlerin bir örneği olan bir boyutlu dalga denklemdir. Farz edelim ki, ℓ uzunluklu esnek bir sicim aynı yatay seviyede iki destek uç arasında gerilmiş olsun (şekil3.1).

Şekil 3.1: Dalga denkleminde ele alınan iki uçta gerilmiş sicim



Eğer sicim dikey düzlemde titreşmeye ayarlanırsa, t zamanında bir x noktasının dikey yer değiştirme fonksiyonu $U(x, t)$ şu diferansiyel denklemini yerine getirir,

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t \quad 3.6$$

Oluşan sönüm etkileri ihmal edilir ve genlik çok büyük değildir. Bu problemde kısıtlamalardan yararlanmak için, farz edelim ki başlangıç konum ve hızı şu şekilde verilsin,

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad 0 \leq x \leq \ell \quad 3.7$$

Eğer uç noktalar sabitse, $u(0, t) = 0$, $u(\ell, t) = 0$ koşulları da mevcuttur.

Hiperbolik kısmi diferansiyel denklem içeren diğer fiziksel problemler bir veya iki uçta sıkıştırılmış titreşim sinyalleri ile çalışmada ve uzun bir hat üzerinde elektrik iletiminde kaçak akım oluştuğunda meydana gelir.

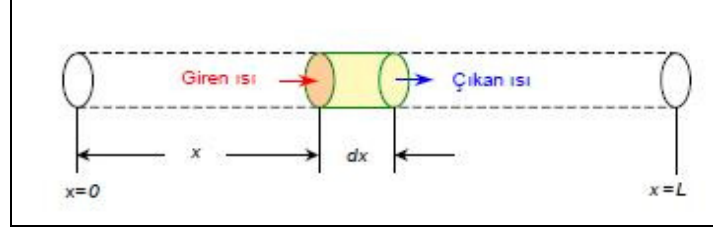
3.3.2 Parabolik Tip

Bölüm 4.4 de parabolik diferansiyel denklem içeren problem için sayısal çözüm ele alınacak;

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad 3.8$$

Burada düşünülen fiziksel problem, ℓ uzunluğunda bir çubuk boyunca ısı akışını ilgilendirir (Şekil 3.2), çubuk her kesit elemanında aynı sıcaklığa sahiptir. Bu, çubuğun yanal yüzeyinin çok iyi izole edilerek çubuğun mükemmel olmasını gerektirir. α sabiti çubuk içindeki pozisyondan bağımsız ve çubuğun meydana getirildiği malzemenin ısı iletimi özellikleriyle belirlenen bir sabittir.

Şekil 3.2: Isı denkleminde ele alınan ℓ uzunluklu çubuk



Bu tipteki ısı-akış problemi için kısıtlamaların özel ayarlarından birisi de çubuktaki ısı dağılımını belirlemektir,

$$u(x,0) = f(x)$$

ve çubuğun uçlardaki davranışını tanımlamaktır. Örneğin, eğer uçlar u_1 ve u_2 sabit sıcaklıklarında tutulursa, sınır koşulları;

$$u(0,t) = u_1 \quad \text{ve} \quad u(\ell,t) = u_2$$

ve ısı dağılımı sıcaklık dağılımının limitine yaklaşır,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{\ell} x.$$

Eğer bunun yerine çubuk uçlarda ısı akışı olmaksızın izole edilirse, sınır koşulları;

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = 0, \quad 3.9$$

sonuçta oluşan, çubuğun sabit bir sıcaklıktaki limit halidir. Parabolik kısmı diferansiyel denklem gaz dağılımı hakkında çalışırken de önemlidir. Bu, difüzyon denklemi olarak bilinir.

3.3.3 Eliptik Tip

Son olarak Bölüm 4.5 de ele alınacak bir kısmi diferansiyel denklem eliptik denklem olarak bilinen *Poisson Denklemi* ;

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y) \quad 3.10$$

Bu denklemde, $f(x, y)$ probleme S sınırlı R bölge yüzeyinden girdi olarak varsayılacaktır. Bu tip denklemler zamandan bağımsız değişkenlerle çalışılan fiziksel problemlerde ortaya çıkar, düzgün bölgede kararlı durum ısı dağılımı, yerçekimi ile hareket eden düzlemdeki bir noktanın potansiyel enerjisi ve iki boyutlu kararlı durum problemlerinin içerdiği sıkışmayan akışkanlar gibi.

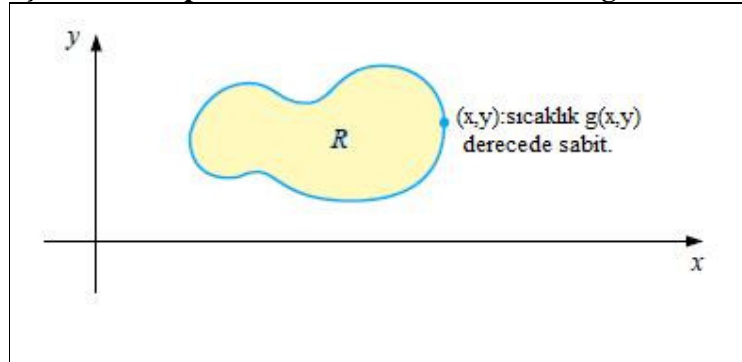
Poisson denkleminin tek bir çözümünün elde edilmesi için ek kısıtlamalar koyulmalıdır. Örneğin; bir düzgün bölgede ısının kararlı durum dağılımının çalışılması $f(x, y) \equiv 0$ olmasını gerektirir. Bu basitleştirme sonucunda

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad 3.11$$

olur ve bu denklem *Laplace denklemi* olarak adlandırılır. Eğer bölgedeki ısı, bölgenin sınırında ısı dağılımıyla değişirse, bu kısıtlamalar Dirichlet sınır koşulları olarak adlandırılır,

$u(x, y) = g(x, y)$, tüm $(x, y) \in S$ $S: \partial R$ (yani bölgesinin sınırı) (Şekil 3.3).

Şekil 3.3: Laplace denkleminde ele alınan bölge ve sınırı



3.4 TAYLOR TEOREMİ

Nümerik analiz çalışmalarında veya bilimsel hesaplamaların sayısal algoritmaları çalışmalarında ortaya çıkan önemli bir teorem $C^n[a,b]$ deki fonksiyonları ilgilendiren Taylor teoremidir.

Teorem 3.1 : Eğer $f \in C^n[a,b]$ ve (a,b) açık aralığında $f^{(n+1)}$ mevcut ise, bu durumda $[a,b]$ kapalı aralığındaki herhangi c ve x noktaları için

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + E_n(x) \quad 3.12$$

dır. Burada c ve x arasındaki bazı ξ ler için hata terimi

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1} \quad 3.13$$

dır. Burada ξ , x ve c nin özel değerlerine bağlı olarak, ya $c < \xi < x$ ya da $x < \xi < c$ dır (Özalp 2012,s.6).

3.5 SONLU FARK FORMÜLASYONLARI

Kısmi diferansiyel denklemlerde yer alan türevlerin bilgisayar programları aracılığıyla sayısal hesabı için yaklaşık formda yazılması gerekmektedir. Bu tür ayrıklaştırma işlemlerine *sonlu fark formülasyonu* adı verilir.

Sonlu fark formülasyonları genellikle Taylor seri açılımları ile yapılır. Bunun yanında polinomlar yardımıyla da ayrıklaştırma yapılabilir.

3.5.1 Taylor Seri Açılımı Ve Birinci Türev İçin Yaklaşımlar

Bir $f(x,t)$ fonksiyonunun $(x + \Delta x, t)$ noktasındaki değeri Taylor seri açılımı ile

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, t) &= f(x, t) + (\Delta x) \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots \\ &= f(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x}{n!} \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} \end{aligned} \quad 3.14$$

şeklinde yazılabilir. Buradan birinci türev çekilirse;

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x,t) - f(x,t)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3} - \dots$$

veya

$$O(\Delta x) = -\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3} - \dots$$

hata terimi olmak üzere,

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x,t) - f(x,t)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad 3.15$$

yazılabilir. Bu ifade f fonksiyonunun x 'e göre birinci türevi için yapılmış birinci dereceden bir yaklaşımdır. İndissel formda

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad 3.16$$

şeklinde gösterilir ve türev için birinci mertebeden ileri fark formülasyonu olarak adlandırılır.

Taylor açılımı,

$$f(x-\Delta x,t) = f(x,t) - (\Delta x) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3} + \dots \quad 3.17$$

şeklinde açılarak benzer işlemler ile

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad 3.18$$

şeklinde birinci mertebeden geri-fark formülasyonu, veya (3.14) ve (3.15) Taylor açılımları birbirinden çıkartılarak

$$f(x+\Delta x,t) - f(x-\Delta x,t) = 2\Delta x \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^3} + \dots$$

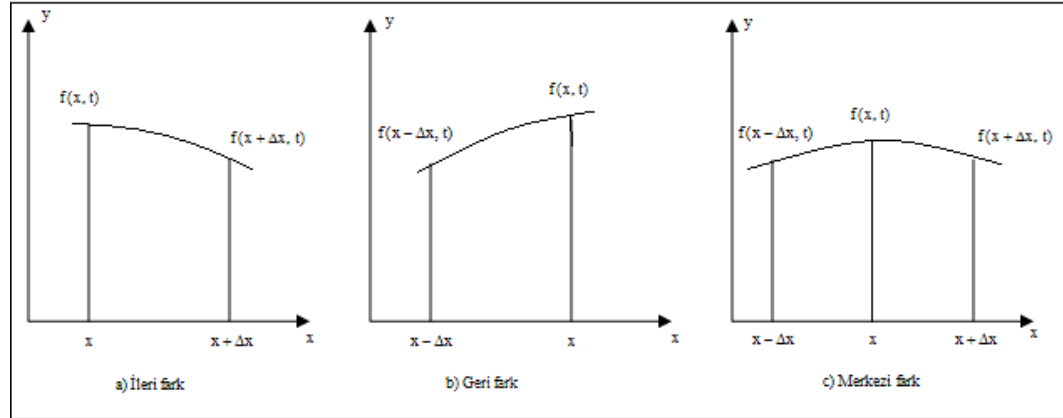
benzeri işlemler sonucu

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad 3.19$$

şeklinde merkezi-fark formülasyonu elde edilebilir. Merkezi fark formülasyonunun ikinci mertebeden olduğu görülmektedir.

Birinci türev için yazılan formülasyonlarda hangi ağ noktalarının kullanıldığı Şekil 3.4 de görülmektedir.

Şekil3.4: Birinci mertebeden türev formülasyonlarında kullanılan ağ noktaları



3.5.2 İkinci Türev İçin Yaklaşımlar

$f(x,t)$ fonksiyonu için $(x+2\Delta x, t)$ ve $(x-2\Delta x, t)$ noktalarındaki Taylor açılımları

$$f(x+2\Delta x, t) = f(x, t) + 2\Delta x \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots \quad 3.20$$

$$f(x-2\Delta x, t) = f(x, t) - 2\Delta x \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots \quad 3.21$$

şeklinde yazılabilir. (3.14) eşitliği 2 ile çarpılıp (3.20) denklemden çıkartılırsa;

$$f(x+2\Delta x, t) - 2f(x+\Delta x, t) = -f(x, t) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} + \dots \quad 3.22$$

ve buradan ikinci türev,

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{f(x+2\Delta x,t) - 2f(x+\Delta x,t) + f(x,t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad 3.23$$

şeklinde elde edilir. Bu bağıntı indissel formda yazılırsa ikinci türevin,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{f_{i+2,j} - 2f_{i+1,j} + f_{i,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad 3.24$$

şeklinde ileri fark formülü elde edilir. Benzer işlemler (3.14) ve (3.21) açılımları arasında yapılırsa ikinci türev için geri fark formülü

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - 2f_{i-1,j} + f_{i-2,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad 3.25$$

şeklinde ve (3.14) ve (3.17) açılımları toplanarak benzer işlemler sonucu ikinci türev için merkezi fark formülü

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad 3.26$$

şeklinde elde edilir.

3.6 SONLU FARK DENKLEMLERİ

Bir kısmi diferansiyel denklemde yer alan bütün türevler bir önceki kısımda elde edilen formülasyonlar ile ayrıklaştırılarak denklemin tamamı ayrık formda yazılır ve sayısal çözümü bu şekilde araştırılır.

Örnek olarak bir $f = f(t, x, y)$ bağımlı değişkenine ait

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad 3.27$$

denklemini ele alalım. Zamana göre türevin sonlu fark açılımında n üst-indisi, konuma göre türevlerin sonlu fark açılımlarında da x yönünde i alt-indisi ve y yönünde de j alt-indisi kullanalım. t anında f fonksiyonunun bütün x, y konumlarındaki değerleri bilinsin. Buna göre zamana göre türevin ileri farkla hesaplanması uygun olur:

$$\frac{\partial f(x_i, y_j, t_n)}{\partial t} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad 3.28$$

Konuma göre türevlerin t_n anında veya t_{n+1} anında ayrıklaştırılmasına göre iki farklı sonlu fark denklemi elde edilebilir. t_n anında ayrıklaştırma yapılırsa

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j, t_n)}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad 3.29$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j, t_n)}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y^2) \quad 3.30$$

Böylece (3.27) denkleminin sonlu fark formülasyonu

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] + O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2) \quad 3.31$$

şekline gelir. t_{n+1} anında ayrıklaştırma yapıldığı takdirde ise

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{f_{i+1,j}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right] + O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2) \quad 3.32$$

elde edilir.

Bu iki formülasyon arasındaki en önemli fark elde edilen ayrıklaştırılmış denklemlerde bulunan bilinmeyen sayıdır. (3.31) denkleminde bir tek bilinmeyen var iken, (3.32) denkleminde beş bilinmeyen vardır.

Bu nedenle (3.31) denklemini bütün ağ noktalarında kolaylıkla hesaplanır ve bu formülasyona **açık (explicit)** formülasyon adı verilir.

Buna karşılık (3.32) denkleminin her bir ağ noktasında bağımsız olarak çözümü mümkün değildir. Bütün ağ noktalarında yazıldıktan sonra elde edilen sistemin eş zamanlı olarak çözülmesi gerekir ve bu formülasyona **kapalı (implicit)** formülasyon adı verilir.

4. MATERYAL VE METOT

4.1 YAKINSAKLIK, TUTARLILIK VE KARARLILIK

Kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu fark yöntemi ile çözümünü vermeden önce *yakınsaklık, kararlılık ve tutarlılık* ifadelerinin tanımları verilecektir (Strikwerda 1989, ss.1-53).

Tanım 4.1.1 (Yakınsaklık): Kısmi diferansiyel denklemi yaklaşık olarak ifade eden bir adımlı sonlu fark algoritmasının **yakınsak** olması ile diferansiyel denklemin çözümü $u(x,t)$ ve sonlu fark denkleminin çözümü ω_m^n ise

$$\omega_m^0 \approx u_0(x_m) \quad mh \rightarrow x$$

$$\omega_m^n \approx u(x_m, t_n) \quad (mh, nk) \rightarrow (x, t), (h, k) \rightarrow 0$$

olarak algılanır.

Bu tanım, ω_m^n ifadesinin yakınsaklığından ne anladığımızı tam olarak açıklayamamaktadır. Çünkü ω_m^n ağ üzerinde tanımlı olmasına karşılık $u(x,t)$ ifadesi (x,t) 'ye göre sürekli olan bir ifadeyi temsil etmektedir, yani biri ayrık diğeri sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla yakınsaklık ifadesini biraz daha açmadan önce tutarlılık kavramı verilir.

Tanım 4.1.2 (Tutarlılık): Bir kısmi lineer diferansiyel denklemi $Pu = f$ ve sonlu fark denklemi $P_{h,k}\omega = f$ verilmiş olsun. Sonlu fark denkleminin verilen kısmi diferansiyel denklem ile **tutarlı** olması için her mertebeden türevi sürekli olan bir $\phi(x,t)$ fonksiyonu için $h, k \rightarrow 0$ iken

$$P\phi - P_{h,k}\phi \rightarrow 0$$

olması anlaşılmaktadır. Burada her ağ noktasında olan noktasal yakınsaklıktan bahsedilmektedir.

Tutarlılık yakınsaklık için gerek bir koşuldur ancak bazı sonlu fark denklemleri tutarlı olmalarına rağmen yakınsak değildirler (Strikwerda 1989).

Tanım 4.1.3 (Kararlılık): $P_{hk}\omega_m^n = 0$ sonlu fark denkleminin bir kararlılık bölgesi Λ olsun. Bir birinci mertebeden homojen kısmi diferansiyel denkleme eğer $\exists J \in \mathbb{Z}$ ve $h_0, k_0 > 0 \ni \forall T > 0 \exists C_T \ni$

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\omega_m^n|^2 \leq C_T h \sum_{j=0}^J \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\omega_m^j|^2 \quad 4.1$$

$0 \leq nk \leq T$ ve $(h, k) \in \Lambda$ şartlarını sağlarsa Λ üzerinde kararlıdır denir.

Sonlu fark denklemleri için kararlılık kavramı kısmi diferansiyel denklemlerde başlangıç değer probleminin iyi-konumlanmış olması ile yakından ilgilidir. Bunu aşağıdaki tanımla daha açık bir hale getirelim.

Tanım 4.1.4 (İyi-Konumlanmış Problem): Bir birinci mertebeden $Pu = 0$ homojen kısmi diferansiyel denklemin $\forall T \geq 0$ için $u(x, t)$ çözümü var, tek ve $\exists C_T$ öyle ki

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx \leq C_T \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, 0)|^2 dx, \quad 0 < t < T \quad 4.2$$

eşitsizliği sağlanıyor ise denkleme iyi-konumlanmıştır denir.

Teorem 4.1 (Lax-Richtmyer Denklik Teoremi) Başlangıç değer problemi iyi-konumlanmış olarak verilen bir kısmi diferansiyel denklem için tutarlı bir sonlu fark denklemini yakınsaktır ancak ve ancak bu sonlu fark denklemini kararlı ise.

4.2 SONLU FARK METODU ANALİZİ

4.2.1 Fourier Analizi

Kararlılık ve iyi konumlanmış konularını çalışırken en iyi araç Fourier analizidir. Fourier analizi hem reel ekseninde hem de tam sayılar ağı kümesinde, başka bir deyişle $hZ = \{hm : m \in Z\}$ üzerinde kullanılacaktır. Reel eksen üzerinde tanımlı bir $u(x)$ fonksiyonu için, Fourier dönüşümü $\hat{u}(\omega)$ ile gösterilip şöyle tanımlanır:

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x) dx \quad 4.3$$

u nun Fourier dönüşümü ω reel değişkenine bağlı bir fonksiyondur ve sadece u ile belirlenir. u hakkındaki bazı bilgiler \hat{u} 'den elde edilebilir. Örneğin, \hat{u} nün büyük ω değerleri için değişim oranının azalması u fonksiyonunun kaç kere türetilbileceği ile yakından ilgilidir.

Ters Fourier formülü,

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{u}(\omega) d\omega \quad 4.4$$

ile verilir ve bu eşitlik u 'nun \hat{u} ile nasıl elde edileceğini gösterir. Ters Fourier formülü u fonksiyonunun $e^{i\omega x}$ ile temsil edilen dalgaların bir üst üste ekleme prensibi olarak farklı $\hat{u}(\omega)$ genlikleri ile ifade edilebilmesine olanak sağlar. Burada $u(x)$ reel bir fonksiyon olsa bile, $\hat{u}(\omega)$ kompleks bir fonksiyon olabilir. Benzer şekilde, eğer v bütün m tam sayı değerleri için tanımlı bir ağı fonksiyonu ise, v nin Fourier dönüşümü

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} v_m \quad 4.5$$

ile verilir, burada $\xi \in [-\pi, \pi]$ ve $\hat{v}(-\pi) = \hat{v}(\pi)$. Ters Fourier formülü

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\xi} \hat{v}(\xi) d\xi \quad 4.6$$

ile verilir.

Sonlu fark denklemlerini çalışırken v_m ağ fonksiyonları ile başlamak (4.6) formülünü ağ fonksiyonunu temsil eden bir denklem gibi görmek doğal bir adımdır.

Eğer ağ noktaları arasındaki adım uzunluğu h ise, değişken dönüşümü ile (4.5) formülü yerine

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h e^{-imh\xi} v_m \quad 4.7$$

yazılabilir, burada $\xi \in \left[\frac{-\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right]$ ve ters Fourier formülü de

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \hat{v}(\xi) d\xi \quad 4.8$$

u fonksiyonunun L^2 normu

$$\|u\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx ,$$

$\hat{u}(\omega)$ fonksiyonunun L^2 ile aynı olup, başka bir deyişle

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega \quad 4.9$$

Ayrıca, ayrık dönüşümler için de L^2 normu şöyle tanımlanır:

$$\|\hat{v}\|_h^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m|^2 h = \|v\|_h^2 \quad 4.10$$

(4.9) ve (4.10) eşitlikleri *Parseval* eşitliği olarak bilinir. Bu konuda daha ayrıntılı bilgi Titchmarsh (1965) ve Goldberg (1965) de mevcuttur. Parseval eşitliği kararlılık çalışmalarında yoğun olarak kullanılmaktadır, ayrıca ağ fonksiyonunun dönüşümü için (4.2) tanımında verilen kararlılık eşitsizlikleri yerine ona denk olan

$$\|\hat{u}\|_h \leq C^*_r \sum_{j=0}^J \|\hat{u}^j\|_h \quad 4.11$$

ayrık dönüşüm eşitsizliğini verir.

4.2.2 Fourier Analizi ve Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bu bölüm kısmi diferansiyel denklemlerini çalışmak için Fourier analizini bir araç olarak kullanarak sonlandırılacaktır. Bir sonraki bölümde de sonlu fark denklemlerinin kararlılığını çalışmak için benzer araçlar kullanılacaktır. Eğer (4.4) ters Fourier formülünün türevi alınırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} i\omega \hat{u}(\omega) d\omega$$

ve (4.3) Fourier dönüşümünü kullanarak,

$$\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)(\omega) = i\omega \hat{u}(\omega) \quad 4.12$$

elde edilir. (4.12) eşitliği Fourier dönüşümünün gerçek gücünü göstermektedir; başka bir deyişle, dönüşüm altında türev operatörü çarpım operatörüne dönüşür.

(4.12) eşitliğinin önemli bir sonucu da $u(x)$ fonksiyonunun r . mertebeden L^2 anlamında integralinin olabilmesi gerek ve yeter şartını Parseval eşitliği yardımıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\omega|^2)^r |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega < \infty \quad 4.13$$

şeklinde verileceğini ifade etmesidir.

H^r fonksiyonlar uzayı r nin her negatif olmayan değeri için $L^2(\mathfrak{R})$ uzayındaki fonksiyonların kümesi olarak tanımlanır ve fonksiyonlar uzayındaki normu da

$$\|u\|_{H^r} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\omega|^2)^r |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} < \infty$$

olacak şekilde tanımlanır. H^0 üzerindeki norm ile L^2 normunun aynı olduğu gözlemlenir. Ayrıca $\|D^r u\|$ normu da

$$\begin{aligned}\|D^r u\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^r}{\partial x^r} u(x) \right|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{2r} |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega\end{aligned}$$

şeklini alır, burada x üzerindeki integral sadece r tam sayı iken tanımlıdır, fakat $\|D^r u\|$ normunu tanımlayan ikinci integral r tam sayı olmasa da tanımlıdır.

4.2.3 Von Neumann Analizi

Fourier analizinin önemli bir uygulaması sonlu fark metotlarının kararlılığının von Neumann analiz yöntemidir. Fourier analizi yardımıyla sonlu fark metotlarının kararlılığı için gerek ve yeter koşullar bulunabilir.

Özel bir örnek olarak, 1. mertebeden lineer homojen kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılacak 1-boyutlu dalga denklemi,

$$u_t + au_x = 0 \tag{4.14}$$

ele alalım.

Bu denklem ileri-zaman ve geri-uzay sonlu fark denklemi olarak yazılırsa

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0 \tag{4.15}$$

elde edilir, burada $h = \Delta x$ ve $k = \Delta t$ için kullanılmıştır, bu denklem düzenlenirse şu

hali alır:

$$v_m^{n+1} = (1 - a\lambda)v_m^n + a\lambda v_{m-1}^n \tag{4.16}$$

burada $\lambda = k/h$ dır. v^n için (4.8) ters Fourier dönüşümü kullanılırsa;

$$v_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \hat{v}(\xi) d\xi$$

ve bu ifadeyi (4.16) de v_m^n ve v_{m-1}^n terimleri için yerine koyulursa,

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} [(1-a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}] \hat{v}^n(\xi) d\xi \quad 4.17$$

Bu ifade ters Fourier dönüşümü ile karşılaştırılırsa

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \hat{v}^{n+1}(\xi) d\xi$$

ve Fourier dönüşümünün tek olduğu gerçeği kullanılırsa, (4.17) ifadesinin integrandının

ters formüldeki integrand ile aynı olduğu sonucu çıkarılır. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \hat{v}^{n+1}(\xi) &= [(1-a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}] \hat{v}^n(\xi) \\ &= g(h\xi) \hat{v}^n(\xi) \end{aligned} \quad 4.18$$

burada

$$g(h\xi) = (1-a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}.$$

(4.18) formülü gösteriyor ki algoritmada bir zaman adımı ilerlemek, çözüm fonksiyonunun, Fourier dönüşümünü *genlik faktörü* $g(h\xi)$ ile çarpmaya denktir. Genlik faktörü olarak adlandırılmasının sebebi de çözümün bir zaman adımında ilerlemesi $\hat{v}^n(\xi)$ çözümündeki her bir frekansın aynı büyüklükte büyümesi ile ilişkilidir. (4.18) denkleminde önemli bir formül elde edilir:

$$\hat{v}^n(\xi) = [g(h\xi)]^n \hat{v}^0(\xi) \quad 4.19$$

Bu formülde \hat{v} üzerindeki n zaman adımını gösterirken $g(h\xi)$ üzerindeki n ise kuvveti göstermektedir. Fourier dönüşümü yardımıyla her bir adım metodu (4.19) şekline dönüşürebilir.

(4.19) ifadesi sonlu fark algoritmalarının kararlılığını ve doğruluk derecesini incelemek için kullanılacaktır. Özellikle $g(h\xi)$ genlik faktörü, kullanılan algoritma ile ilgili çok bilgi içermektedir.

Şimdi (4.19) formülü kullanılarak, (4.15) ile verilen algoritmanın kararlılığı analiz edilecektir. Parseval eşitliğini, (4.10) ve (4.19) ifadelerini kullanarak,

$$\begin{aligned} h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 &= \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |g(h\xi)|^{2n} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı (4.1) kararlılık eşitsizliği, $J = 0$ halinde, eğer $|g(h\xi)|^{2n}$ sınırlı ise sağlanır. $\|g(h\xi)\|^{2n} \leq 1$ iken

$$\begin{aligned} h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 &\leq \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi \\ &= h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{v}_m^0|^2 \end{aligned}$$

Teorem 4.2 *Sabit katsayılı 1-adımlı sonlu fark denklemini bir kararlılık bölgesi Λ 'da kararlıdır ancak ve ancak $\exists K$ sabiti ($\theta = h\xi, k$ ve h değerlerinden bağımsız) ve $\exists k_0, h_0$ pozitif ağ aralıkları öyle ki $\forall \theta, 0 < k \leq k_0$ ve $0 < h \leq h_0$ için eğer*

$$|g(\theta, h, k)| \leq 1 + Kk. \quad 4.20$$

Eğer $g(\theta, h, k)$, h ve k dan bağımsız ise, bu taktirde (4.20) kararlılık koşulu şu hali alır

$$|g(\theta)| \leq 1. \quad 4.21$$

Bu teorem sonlu fark algoritmasının kararlılığını belirlemek için sadece $g(h\xi)$ genlik faktörünün göz önüne alınması gerektiğini gösteriyor. Bu analiz, von Neumann tarafından ortaya atıldığı için *von Neumann analizi* olarak adlandırılır.

Von Neumann analizini yapmak için (4.8) integrallerinin açıkça yazılmasına gerek yoktur, sadece v_m^n ifadesini algoritmada her (4.8) ve m için $g^n e^{im\theta}$ ile yer değiştirilmesi yeterli olacaktır. Elde edilen denklemin genlik faktörü çözülür. Yalnız şuna dikkat edilmelidir ki, burada $v_m^n = g^n e^{im\theta}$ demekle sadece v_m^n ifadesinin şeklinin 'bu formda' olduğunu söylemeye çalışmaktadır.

Tabii ki diferansiyel denklem için birçok algoritma verildikten sonra en önemli soru hangi algoritma hangi problem için daha uygun olduğu sorusudur. Özellikle problemin fiziksel yapısına bağlı olacak şekilde $\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ifadesini sayısal olarak ele alırken, (4.14) dalga denkleminde a dalganın hızını göstermektedir ve a ile λ arasındaki ilişki bazı sonlu fark denklemlerinde çözümün yakınsayıp yakınsamadığını gösterir. Özellikle dalga denkleminde

$$\frac{\frac{a}{\Delta x}}{\Delta t} \leq 1$$

eşitsizliği **Courant kararlılık koşulu** olarak bilinir. Burada a dalganın ilerleme hızını gösterirken, $\Delta x/\Delta t$ sonlu fark denkleminin ilerleme hızını göstermektedir. Bundan dolayı şu söylenebilir ki sayısal yöntemimizin hızı orijinal dalga denkleminin hızından büyük olmak zorundadır. Bu da sayısal hesaplamalarda

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a}$$

koşulunu getirir, başka bir deyişle Δt çok büyük olamaz, aksi takdirde yaklaşım metodu kararsız olur. Bu, **yeter bir şarttır ancak gerek koşul değildir.**

4.3 HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN SONLU FARK METODU

Bu bölümde ele alınan dalga denkleminin sayısal çözümü hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin bir örneğidir. Dalga denklemi,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \quad \text{ve } \alpha : \text{sabit olmak üzere,}$$

sınır koşulları;

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad 0 > t \quad \text{ile}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 \leq x \leq \ell$$

başlangıç koşullarına bağlıdır.

Bir $m > 0$ tam sayısı ve $k > 0$ zaman-adım aralığı belirlenir. $h = \frac{\ell}{m}$ olmak üzere

(x_i, t_j) noktaları $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, m$ ve $t_j = jk$, $j = 0, 1, \dots$ olacak şekilde tanımlanır.

Herhangi bir iç bölgedeki ağ noktası (x_i, t_j) de dalga denklemi,

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = 0. \quad 4.22$$

İkinci mertebeden türevler için merkezi fark oranı kullanımıyla elde edilen fark metodu,

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \mu_j)}{\partial t^4}, \quad \mu_j \in (t_{j-1}, t_{j+1})$$

ve

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial t^4}, \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

(4.22) dalga denkleminde yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} \\ &= \frac{1}{12} \left[k^2 \frac{\partial^4 u(x_i, \mu_j)}{\partial t^4} - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial t^4} \right] \end{aligned}$$

İhmal edilen hata terimi;

$$\tau_{i,j} = \frac{1}{12} \left[k^2 \frac{\partial^4 u(x_i, \mu_j)}{\partial t^4} - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial t^4} \right].$$

Böylece $O(h^2 + k^2)$ mertebeli fark denklemi,

$$\frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{k^2} - \alpha^2 \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h^2} = 0. \quad 4.23$$

$\lambda = \alpha \frac{k}{h}$ olmak üzere, $\omega_{i,j+1}$ için ileri zaman adımli yaklaşımı elde etmek için,

$$\omega_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)\omega_{i,j} + \lambda^2(\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j}) - \omega_{i,j-1}.$$

Bu denklem tüm $i = 1, 2, \dots, m-1$ ve $j = 1, 2, \dots$ değerleri için yazılır. Sınır koşullarından ;

$$\omega_{0,j} = \omega_{m,j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots$$

ve

başlangıç koşullarından ifade edilir ki;

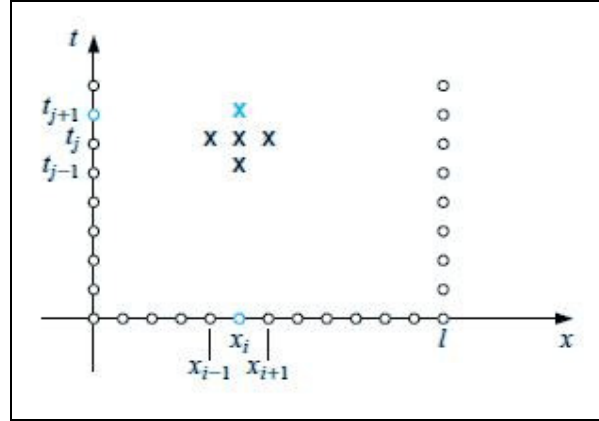
$$\omega_{i,0} = f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, m-1 .$$

Bu belirlenen denklemler matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \omega_{1,j+1} \\ \omega_{2,j+1} \\ \vdots \\ \omega_{m-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,j} \\ \omega_{2,j} \\ \vdots \\ \omega_{m-1,j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_{1,j-1} \\ \omega_{2,j-1} \\ \vdots \\ \omega_{m-1,j-1} \end{bmatrix}.$$

$\omega_{i,j+1}$ 'i belirlemek için j . ve $j-1$. zaman adımlarından değerler gerekir(Şekil 4.1).

Şekil 4.1: Dalga denklemini AİFM için belli bir adımdaki ağ noktaları



Tüm $j = 0$ için olan değerler başlangıç koşullarında verildiği için küçük bir başlangıç problemi var, fakat $\omega_{i,2}$ 'yi hesaplamak için ihtiyaç duyulan $j = 1$ için olan değerler

başlangıç hız koşulu $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \quad 0 \leq x \leq \ell$ 'dan elde edilmek zorundadır.

Bunun için bir yaklaşım ileri fark metodunda $\frac{\partial u}{\partial t}$ şartını yerine koymaktır;

$$\frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \tilde{\mu}_i)}{\partial t^2}, \quad 0 < \tilde{\mu}_i < t_1.$$

$u(x_i, t_1)$ için çözüm;

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + k \frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \tilde{\mu}_i)}{\partial t^2} \\ &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \tilde{\mu}_i)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\omega_{i1} = \omega_{i0} + kg(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Fakat bu hatası sadece $O(k)$ mertebesinden olan bir yaklaşım verir, oysa ki hiperbolik denklem için genel fark denklemi $O(h^2 + k^2)$ mertebesindedir. $u(x_i, 0)$ için daha iyi bir yaklaşım elde edilebilir.

$u(x_i, t_1)$ ' in ikinci mertebeden Maclaurin polinomunda t için açılımından meydana gelen,

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k \frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, 0)}{\partial t^2} + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, \tilde{\mu}_i)}{\partial t^3}, \quad 0 < \tilde{\mu}_i < t_1$$

denklemini ele alalım.

Eğer f'' mevcut ise,

$$\frac{\partial^2 u(x_i, 0)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x_i, 0)}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} = \alpha^2 f''(x_i)$$

ve

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i) + \frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, \tilde{\mu}_i)}{\partial t^3},$$

hata mertebesi $O(k^2)$ olan bir yaklaşım verir;

$$\omega_{i1} = \omega_{i0} + kg(x_i) + \frac{\alpha^2 k^2}{2} f''(x_i).$$

Eğer $f''(x_i)$ kolayca elde edilebilir değilse, bunu yazmak için merkezi fark metodunu kullanabiliriz,

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\tilde{\xi}_i), \quad x_{i-1} < \tilde{\xi}_i < x_{i+1}.$$

Böylece yaklaşım,

$$\frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{k} = g(x_i) + \frac{k\alpha^2}{2h^2} [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))] + O(k^2 + h^2k),$$

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{k^2\alpha^2}{2h^2} [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))] + O(k^3 + h^2k^2).$$

$\lambda = k \frac{\alpha}{h}$ olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} u(x_i, t_1) &= u(x_i, 0) + kg(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))] + O(k^3 + h^2k^2) \\ &= (1 - \lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + kg(x_i) + O(k^3 + h^2k^2). \end{aligned}$$

Dalga denklemi için fark metodu,

$$\omega_{i1} = (1 - \lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2} f(x_{i-1}) + kg(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \quad 4.24$$

4.4 PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN SONLU FARK METODU

Bu bölümde çalışılacak olan parabolik kısmi diferansiyel denklem ısı veya difüzyon denklemi olarak bilinen

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < \ell \quad t > 0,$$

ve koşullar;

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(\ell, t) &= 0 & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 \leq x \leq \ell. \end{aligned}$$

Bu problemin yaklaşık çözümü için kullanılan yaklaşım Bölüm 4.3 de ki benzer sonlu farkları içerir. İlk olarak bir $m > 0$ tam sayı olmak üzere $h = \frac{\ell}{m}$ belirlenir. Bu taktirde uzunluğu k olan zaman aralığı da seçilir. Bu durum için $x_i = i \cdot h \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$ ve

$j = 0, 1, \dots$ olmak üzere ağ noktaları (x_i, t_j) dir. t 'ye göre fark oranında Taylor polinomunu kullanarak,

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \mu_j)}{\partial t^2}, \mu_j \in (t_j, t_{j+1}),$$

x 'e göre fark oranında Taylor teoremini kullanarak,

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_i + h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - h, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial x^4}, \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

olmak üzere fark metodunu elde ederiz.

Aralıktaki tüm (x_i, t_j) ağ noktaları için parabolik kısmi diferansiyel denklem

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = 0 \quad 4.25$$

şeklinde ifade edilir. İki fark oranı kullanılarak fark metodu;

$$\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h^2} = 0 \quad 4.26$$

burada $\omega_{i,j}$, $u(x_i, t_j)$ için yaklaşım değeri belirtir.

Bu fark metodu için hata,

$$\tau_{i,j} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \mu_j)}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial x^4}$$

dır. $\omega_{i,j+1}$ için fark metodunun çözümü $i = 1, 2, \dots, m-1$, $j = 1, 2, \dots$ için,

$$\omega_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2\alpha^2 k}{h^2}\right) \omega_{i,j} + \alpha^2 \frac{k}{h^2} (\omega_{i+1,j}, \omega_{i-1,j}).$$

$u(x, 0) = f(x)$ yani $\omega_{i,0} = f(x_i)$ başlangıç koşullarından dolayı, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ için olan değerler $i = 1, 2, \dots, m-1$ için $\omega_{i,1}$ değerlerini bulmak için fark metodunda kullanılabilir.

$u(0,t)=0$ ve $u(\ell,t)=0$ koşullarından $\omega_{0,1} = \omega_{m,1} = 0$ dır, böylece $\omega_{i,1}$ için tüm girdiler belirlidir. Eğer yöntem bilinen $\omega_{i,1}$ değerleri için yeniden uygulanırsa benzer şekilde $\omega_{i,2}, \omega_{i,3}, \dots, \omega_{i,m-1}$ değerleri elde edilebilir.

Fark metodunun açık niteliği gösterir ki, bu sistemle ilişkili $(m-1) \times (m-1)$ boyutlu matris $\lambda = \alpha^2(k/h^2)$ olmak üzere üçgensel formda yazılabilir;

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \lambda \\ 0 & & & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix}.$$

Eğer $\omega^{(0)} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1}))^t$ tanımlanırsa ve,

$$\omega^{(j)} = (\omega_{1,j}, \omega_{2,j}, \dots, \omega_{m-1,j})^t, \quad j = 1, 2, \dots$$

olursa bu taktirde yaklaşık çözüm;

$$\omega^{(j)} = A \omega^{(j-1)} \quad j = 1, 2, \dots$$

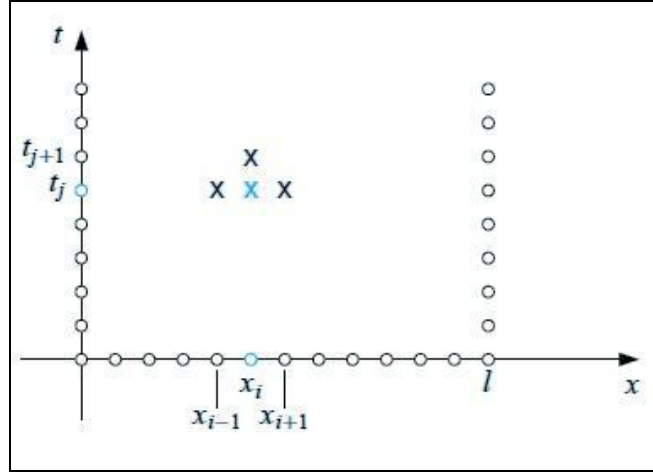
şeklinde verilir.

Böylece $\omega^{(j)}, \omega^{(j-1)}$ in basit matris çarpımlarından elde edilir. Bu ileri fark metodu olarak bilinir ve $O(k + h^2)$ mertebelidir.

İleri fark metodu belli bir adımda $(x_{i-1}, t_j), (x_i, t_j), (x_i, t_{j+1}), (x_{i+1}, t_j)$ ağ noktalarını içerir ve Şekil 4.2 de gösterilen noktalarda yaklaşımları kullanır.

İleri fark metodu, tüm yaklaşımlar başlangıç ve sınır koşullarındaki bilgilere göre doğrudan bulunabildiği için açık bir metottur.

Şekil 4.2: Isı denklemleri için belli bir adımdaki ağ noktaları



4.4.1 İleri Fark Metodu İçin von Neumann Analizi

$u_t = \alpha^2 u_{xx}$ ısı denklemini bir önceki bölümde sonlu farklarla ifade eden (4.26) denklemi, $i = j$ ve $j = k$ indis değişimi yapılır ve yeniden düzenlenirse,

$$\omega_j^{k+1} = \omega_j^k + \lambda(\omega_{j+1}^k - \omega_j^k + \omega_{j-1}^k), \quad \text{burada } \lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}. \quad 4.27$$

Ayrık Fourier dönüşümünden biliniyor ki;

$$\omega_j^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\xi} \hat{\omega}^k(\xi) d\xi$$

$$\omega_{j+1}^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(j+1)h\xi} \hat{\omega}^k(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\xi} e^{ih\xi} \hat{\omega}^k(\xi) d\xi$$

$$\omega_{j-1}^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(j-1)h\xi} \hat{\omega}^k(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\xi} e^{-ih\xi} \hat{\omega}^k(\xi) d\xi$$

Bu ifadeler (4.27) da yerine koyulursa,

$$\omega_j^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\xi} (1 + \lambda(e^{-ih\xi} - 2 + e^{ih\xi})) \hat{\omega}^k(\xi) d\xi$$

$$\omega_j^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\xi} \hat{\omega}^{k+1}(\xi) d\xi$$

Ayrık Fourier dönüşümünün tek olduğu kavramından,

$$\begin{aligned}\hat{\omega}^{k+1}(\xi) &= (1 + \lambda(e^{-ih\xi} - 2 + e^{ih\xi}))\hat{\omega}^k(\xi) \\ &= g(\xi)\hat{\omega}^k(\xi)\end{aligned}$$

Buradan,

$$g(\xi) = 1 + \lambda(e^{-ih\xi} - 2 + e^{ih\xi}), \quad g(\xi): \text{büyüme çarpanı.}$$

Eğer $|g(\xi)| \leq 1$ ise, bu takdirde

$$|\hat{\omega}^{k+1}| \leq |\hat{\omega}^k|$$

ve bundan dolayı

$$\|\hat{\omega}^{k+1}\|_h \leq \|\hat{\omega}^k\|_h$$

bu takdirde sonlu fark metodu kararlıdır. Öyleyse,

$$e^{ih\xi} = \cos(\xi h) + i \sin(\xi h)$$

$$g(\xi) = 1 + \lambda(\cos(\xi h) - i \sin(\xi h) - 2 + \cos(\xi h) + i \sin(\xi h))$$

$$= 1 + 2\lambda(\cos(\xi h) - 1)$$

$$= 1 + 2\lambda\left(-2 \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)\right)$$

$$= 1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)$$

Eğer $-1 \leq 1 - 4\lambda$ ise bu takdirde $|g(\xi)| \leq 1$ yani metod kararlıdır. Dolayısıyla yeter koşul

$$2\lambda \leq 1$$

dir. Buradan,

$$2\alpha^2 \frac{k}{h^2} \leq 1$$

veya

$$k \leq \frac{h^2}{2\alpha^2}, \text{ kararlılık için } k \text{ nın üst sınırı.}$$

4.28

4.4.2 Kapalı Geri Fark Metodu (KGFM)

Daha kararlı bir metot elde etmek için , $\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t}$ için geri fark oranı kullanımından oluşan bir kapalı(implicit)metodu ele alalım.

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \mu_j)}{\partial t^2}, \mu_j \in (t_{j-1}, t_j).$$

Bu denklem ve $\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2}$ için merkezi fark oranını (4.25) denkleminde yerine koyalım

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{k} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} \\ = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \mu_j)}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial x^4}, \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}). \end{aligned}$$

Fark metodunun bu hali ısı denklemi için geri fark metodu olarak adlandırılır.

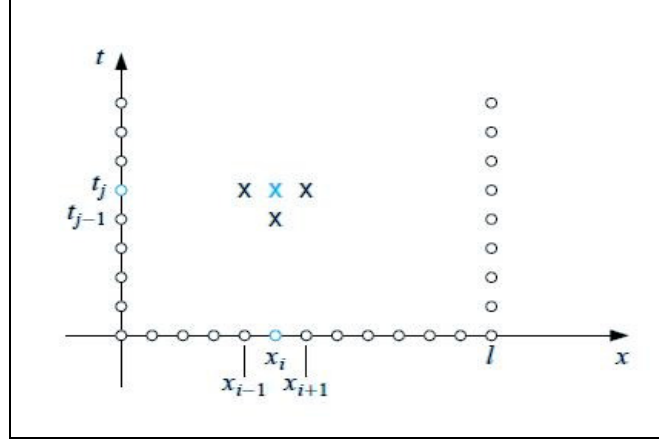
$$\frac{\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}}{k} - \alpha^2 \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h^2} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad \text{ve} \quad j = 1, 2, \dots$$

Burada hata,

$$\tau_{i,j} = \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \mu_j)}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial x^4}.$$

Geri fark metodu belli bir adımda $(x_i, t_j), (x_i, t_{j-1}), (x_{i-1}, t_j), (x_{i+1}, t_j)$ ağ noktalarını içerir ve Şekil 4.3 de gösterilen noktalarda yaklaşımları kullanır.

Şekil 4.3: Isı denklemini KGM için belli bir adımdaki ağ noktaları



4.4.3 Geri Fark Metodu İçin von Neumann Analizi

İleri fark metodu için yapılan şekilde indis değişimiyle geri fark metodu,

$$\omega_j^{k-1} = \omega_j^k - \lambda(\omega_{j+1}^k - \omega_j^k + \omega_{j-1}^k), \text{ burada } \lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

şeklinde yazıldıktan sonra sırasıyla benzeri işlemler yapılarak

$$\frac{1}{g(\xi)} = 1 - \lambda e^{-ih\xi} + 2\lambda - \lambda e^{ih\xi}$$

bulunur ve başka bir deyişle

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{1 - \lambda e^{-ih\xi} + 2\lambda - \lambda e^{ih\xi}} \\ &= \frac{1}{1 + 2\lambda(1 - \cos(h\xi))} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Her λ değeri için $|g(\xi)| \leq 1$ olduğu görülür.

4.4.4 Crank-Nicolson Metodu

Bu metotta, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ısı denkleminin karşılık gelen t_j ve t_{j+1} gibi iki

noktada hesaplanmış iki merkezi farkların ortalaması olan

$$\frac{1}{k} [u_{i,j+1} - u_{i,j}] = \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right]$$

fark denklemini kullanılır.

Fark metodunun bu hali ısı denklemini için Crank-Nicolson metodu olarak adlandırılır.

$$-\lambda \omega_{i+1,j+1} + 2(1+\lambda)\omega_{i,j+1} - \lambda \omega_{i-1,j+1} = \lambda \omega_{i+1,j} + 2(1-\lambda)\omega_{i,j} + \lambda \omega_{i-1,j}$$

burada $i = 1, 2, \dots, m-1$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ ve $\lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$ dir.

4.4.5 Crank-Nicolson Metodu İçin von Neumann Analizi

İndis değişimiyle Crank Nicolson metodu,

$$-\lambda \omega_{j+1,k+1} + 2(1+\lambda)\omega_{j,k+1} - \lambda \omega_{j-1,k+1} = \lambda \omega_{j+1,k} + 2(1-\lambda)\omega_{j,k} + \lambda \omega_{j-1,k},$$

şeklinde yazıldıktan sonra ileri fark metodunda olduğu gibi sırasıyla benzer işlemler yapılarak

$$g(\xi) = \frac{1 - \lambda(1 - \cos(\xi h))}{1 + \lambda(1 - \cos(\xi h))}$$

olarak bulunur.

$|g(\xi)| \leq 1$ eşitsizliği her koşulda sağlandığından bu yöntemin koşulsuz kararlı olduğu

söylenir.

4.5 ELİPTİK DENKLEMLER İÇİN SONLU FARK METODU

Eliptik kısmi diferansiyel denklem olarak Poisson denklemini ele alalım,

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y),$$

$R = \{(x, y) \mid a < x < b, \quad c < y < d\}$ olsun ayrıca $u(x, y) = g(x, y)$, $(x, y) \in S$; $S = \partial R$ yani R nin sınırını gösterebilirsin.

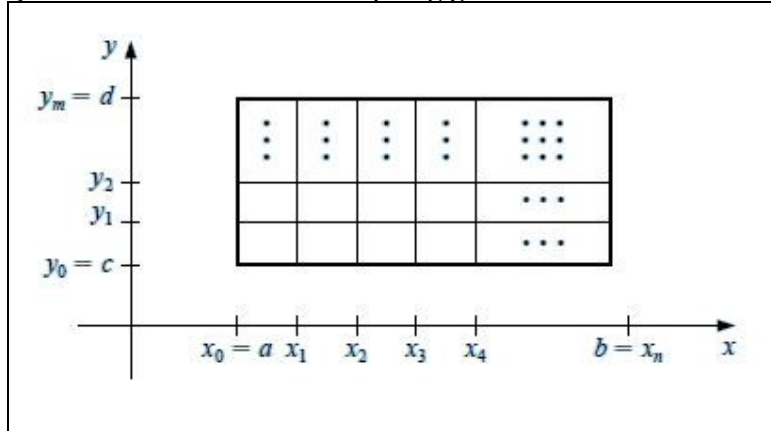
İlk adım m ve n sabitlerini seçerek h ve k adım aralıklarını $h = \frac{(b-a)}{n}$, $k = \frac{(d-c)}{m}$

olacak şekilde belirlemek yani $[a, b]$ aralığını h genişlikte n eşit parçaya, $[c, d]$ aralığını k genişlikte m eşit parçaya bölmektir.

$x_i = a + ih$ $y_j = c + jk$ $i=0,1,\dots,n$ $j=0,1,\dots,m$ olmak üzere (x_i, y_j)

koordinatlarında ki noktalar aracılığıyla Şekil 4.4 de görüldüğü gibi yatay ve dikey doğrular çizerek R dikdörtgeni üzerinde bir ağ oluşturulsun.

Şekil 4.4 Poisson denklemini için ağ gösterimi



$x = x_i$ ve $y = y_j$ doğruları ağ doğrularıdır ve onların kesişimleri ağın birleşme noktalarıdır. Ağ aralığındaki her bir birleşme noktası için Taylor polinomu kullanılarak merkezi fark metodu elde edilebilir.

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_i, y_j)}{\partial x^4}, \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

Benzer şekilde,

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_j)}{\partial y^4}, \eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$$

Poisson denkleminde bu formülleri kullanarak şu eşitlik elde edilir;

$$\frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}))}{k^2} = f(x_i, y_j),$$

$$i=1,2,\dots,n-1, \quad j=1,2,\dots,m-1 . \quad 4.29$$

ve burada hata

$$\tau_{i,j} = \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_i, y_j)}{\partial x^4} + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_j)}{\partial y^4} \quad 4.30$$

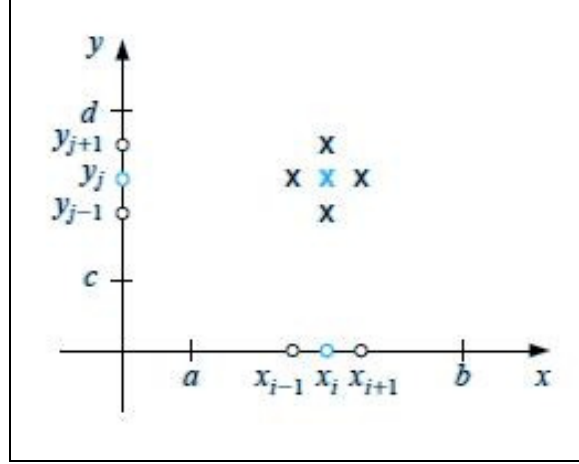
dır.

Sınır koşulları;

$$u(x_i, y_0) = g(x_i, y_0), u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m) , \quad i=1,2,\dots,n-1.$$

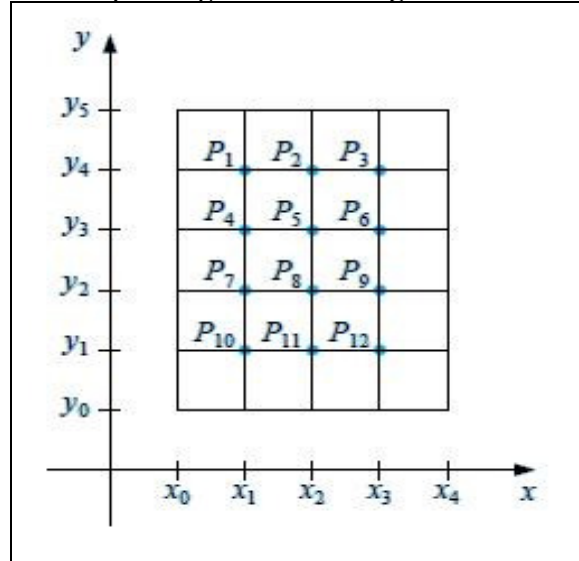
Belli bir adımda denklem $(x_{i-1}, y_j), (x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j-1}), (x_i, y_{j+1})$ noktalarında $u(x, y)$ için yaklaşımlar içerir. Bu noktalarda konumlandırılan ağ kısmının çoğaltılması gösterir ki her denklem (x_i, y_j) civarında Şekil 4.5 de gösterildiği gibi yıldız biçimli bir bölgede yaklaşımlar içerir.

Şekil 4.5: Poisson denklemini AİFM için belli bir adımdaki ağ noktalar



Eğer sınır koşulları kullanılırsa, hangi zaman için olursa olsun, sonlu fark metoduyla verilen sistemde (öyle ki, adım uzunluğu sınırdaki noktalara komşu olan tüm (x_i, y_j) noktalarında), iç aralık noktalarında $u(x_i, y_j)$ ve $\omega_{i,j}$ bilinmeyen yaklaşımlarının kullanımıyla $(n-1)(m-1) \times (n-1)(m-1)$ boyutlu lineer sistem mevcuttur.

Şekil 4.6: Poisson denklemindeki bilinmeyenleri içeren ağ noktalarının gösterimi



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad 4.32$$

şeklinde yazılabilir. Burada \mathbf{T} , $(n \times n)$ boyutlu matris ve \mathbf{b} , bir vektördür.

Bu yöntemde çözümün bulunabilmesi için başlangıçta bir vektörün seçilmesi gerekir.

Eğer başlangıç vektörü $\mathbf{x}^{(0)}$ olarak seçilirse, bu durumda birinci iterasyon sonunda

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b}$$

tahmini elde edilir. Bu yeni vektör (4.32) da yerine yazılırsa,

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b}$$

elde edilir. Bu şekilde iterasyona devam edilerek k . iterasyon sonucunda

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{T}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

elde edilir. Bu iterasyon daha açık olarak $k \geq 1$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$x_i^{(k)} = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n (-a_{ij} x_j^{(k-1)}) + b_i}{a_{ii}}$$

olarak yazılır. ε iterasyonları durdurmak için verilen hata sınır olmak üzere

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\|}{\|x_i^{(k)}\|} < \varepsilon$$

oluncaya kadar iterasyona devam edilir. Burada $x_i^{(k)}$, k . iterasyonda \mathbf{x}_k vektörünün i . bileşenini göstermektedir.

Bu metod, A nın köşegen ve köşegen olmayan kısımlarına bölünmesiyle $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$ formunda yazılır. Bunu görmek için, A nın köşegen üzerindeki bileşenlerinden oluşan matris D , A nın alt üçgensel kısmındaki elemanlardan oluşan matris L ve üst köşegenel kısmındaki elemanlardan oluşan matris U olmak üzere tanımlanır. Bu notasyonla,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ -a_{21} & & \\ -a_{n1} & & \\ & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{1n} \\ 0 & & \\ & & -a_{n-1,n} \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= D - L - U$$

şeklinde bölünür.

Böylece, $Ax = b$ veya $(D - L - U)x = b$ denklemi,

$$Dx = (L + U)x + b$$

şeklinde ifade edilebilir ve eğer D^{-1} mevcutsa yani $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $a_{ii} \neq 0$ ise,

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

dır.

Jacobi iterasyon yönteminin matris formunda bu sonuçlar,

$$x^{(k)} = T_j x^{(k-1)} + b_j,$$

burada $T_j = D^{-1}(L + U)$ ve $b_j = D^{-1}b$ dir.

Teorem 4.3 Eğer A köşegensel dominant matris ise yani,

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

ise herhangi bir \mathbf{b} ve $\mathbf{x}^{(0)}$ seçimi için Jacobi iterasyon metodu $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ nin tek bir çözümüne yakınsar (Burden&Faires, 2002 , s.364).

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

5.1 HİPERBOLİK DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÖRNEK

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t$$

olmak üzere dalga denklemini,

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad 0 < t$$

sınır koşulları ve

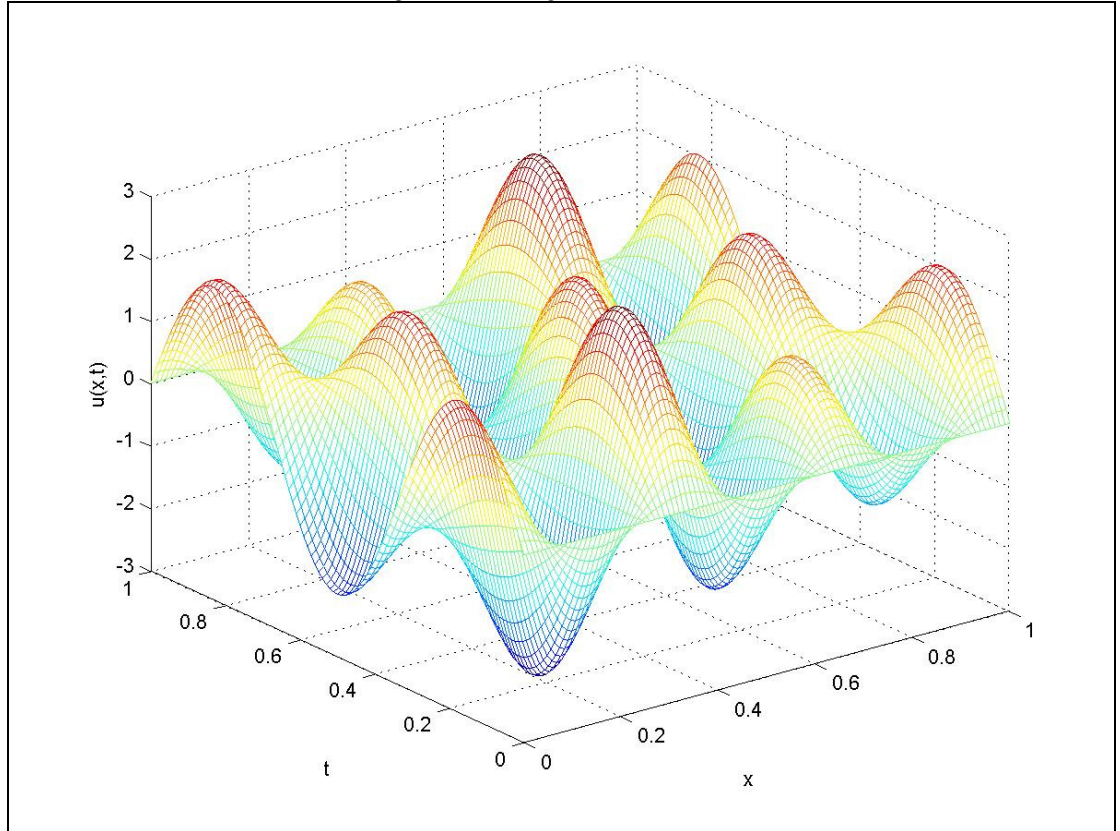
$$u(x,0) = 2 \sin(3\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -12 \sin(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç koşulları için ele alalım.

Bu problem için analitik çözüm $u(x,t) = 2 \cos(6\pi t) \sin(3\pi x) - \frac{3}{\pi} \sin(4\pi t) \sin(2\pi x)$ dır

(Şekil 5.1).

Şekil 5.1 : $k = 0.01$, $h = 0.01$ için analitik çözüm(AİFM)

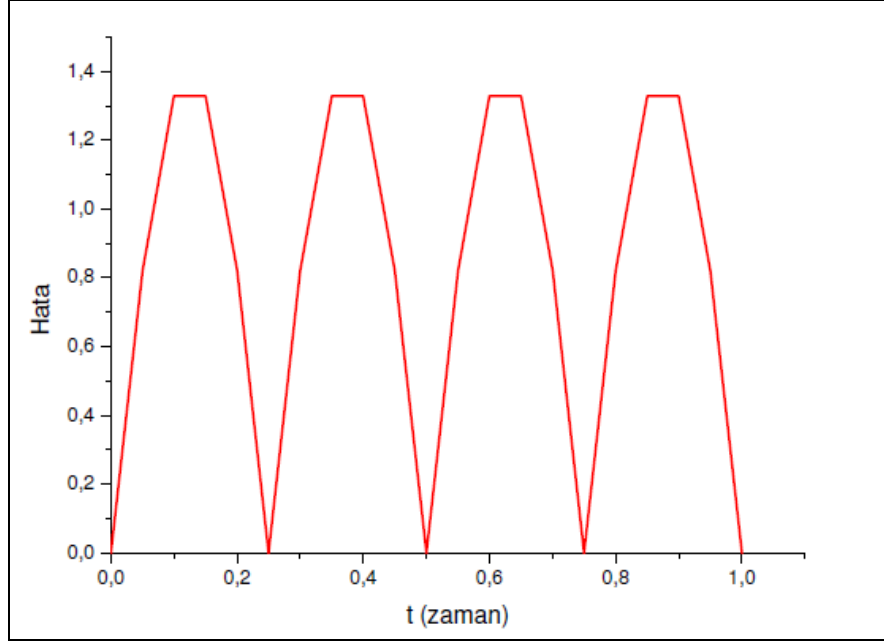


$m = 10$ ve $n = 20$ yani $h = 0.1$ ve $k = 0.05$ olmak üzere ileri fark metodu kullanılarak elde edilen sonuçlar Tablo 5.1 de gösterilmiştir.

Tablo 5.1: Dalga denklemi için AİFM ile elde edilen sonuçlar

x_i	$u(x_i, 1.0)$	$\omega_{i,20}$	$ u(x_i, 1.0) - \omega_{i,20} $
0.0	0.0	0.0	
0.1	1.618033823	1.618034019	$1.962795988 \times 10^{-7}$
0.2	1.902112683	1.902113000	$3.175869601 \times 10^{-7}$
0.3	$6.180335215 \times 10^{-1}$	$6.180338391 \times 10^{-1}$	$3.1758677377 \times 10^{-7}$
0.4	-1.175570871	-1.175570674	$1.9627919047 \times 10^{-7}$
0.5	-1.999999999	-1.999999999	$3.050892872 \times 10^{-13}$
0.6	-1.175570054	-1.175570250	$1.962795624 \times 10^{-7}$
0.7	$6.180346555 \times 10^{-1}$	$6.180343380 \times 10^{-1}$	$3.175866227 \times 10^{-7}$
0.8	1.902113480	1.902113162	$3.175864194 \times 10^{-7}$
0.9	1.618033908	1.618033711	$1.962791068 \times 10^{-7}$
1.0	0.0	0.0	

Şekil 5.2 : $k = 0.05$, $h = 0.1$ için hata grafiği(AİFM)



Şekil 5.2 de görüleceği üzere hata, her t değerinde belli bir üst sınırdaki kalıyor yani hata zaman ilerledikçe küçülüyor. Bu da ileri fark metodunun bu problem için yakınsamadığının göstergesidir.

5.2 PARABOLİK DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÖRNEK

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t$$

olmak üzere ısı denklemini,

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t$$

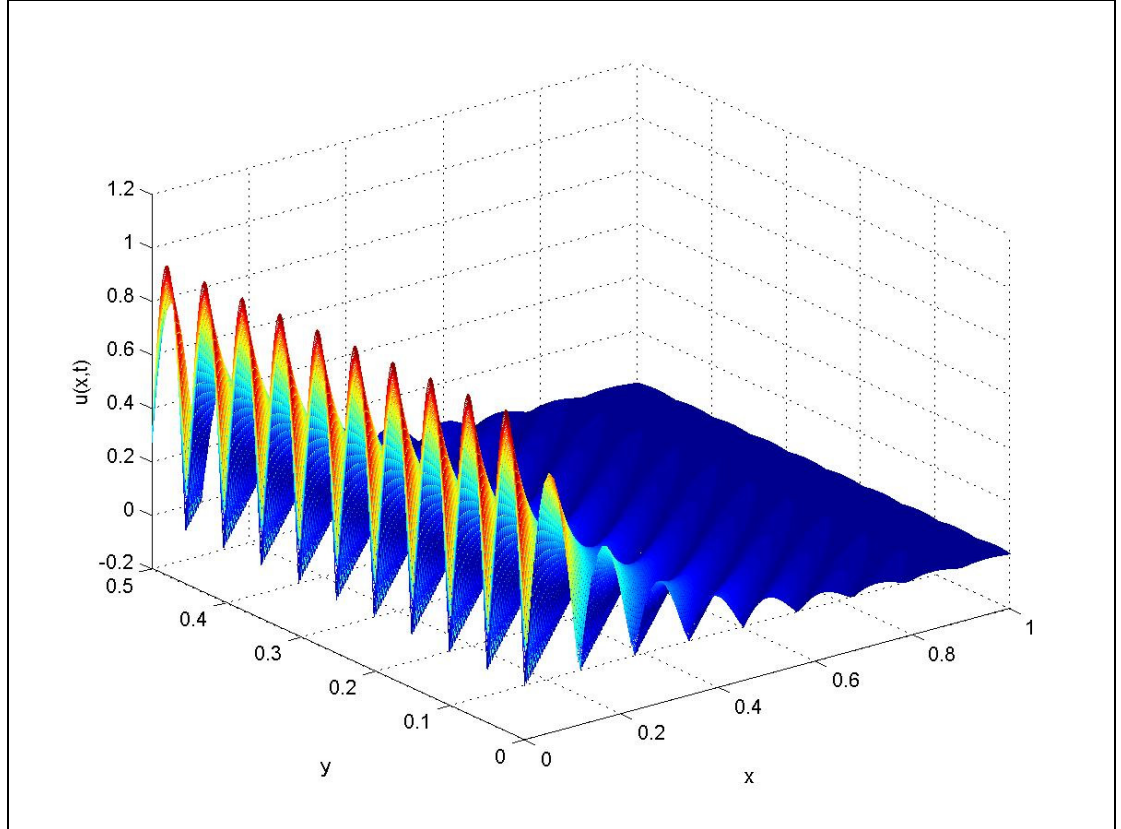
sınır koşulları ve

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1$$

başlangıç koşulları için ele alalım.

Kolayca elde edilebilir ki bu problem için analitik çözüm $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ dır (Şekil 5.3).

Şekil 5.3 : $k = \frac{0.5}{1000}$, $h = \frac{1}{100}$ için analitik çözüm

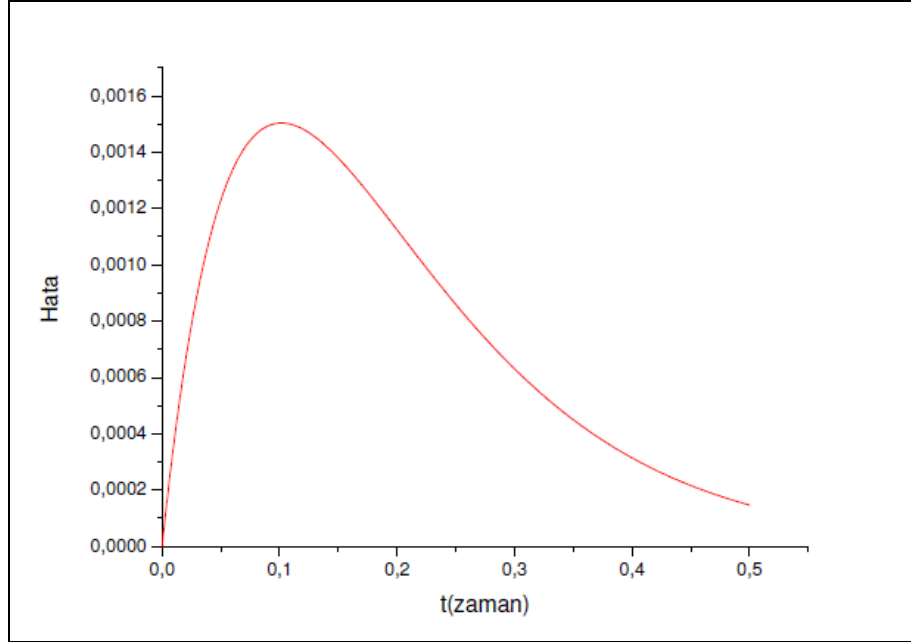


$t = 0.5$ zamanında ileri fark metodu kullanılarak öncelikle $h = 0,1$ ve $k = 0,0005$ yani $\lambda = 0,05$ için ve daha sonra $h = 0,1$ ve $k = 0,01$ yani $\lambda = 1$ için çözüme ileri fark metodu ile yaklaşım yapılmış ve elde edilen değerler Tablo 5.2 de gösterilmiştir.

Tablo 5.2: Isı denklemi için AİFM ile elde edilen sonuçlar

x_i	$u(x_i, 0.5)$	$\omega_{i,1000}$		$\omega_{i,50}$	
		$k = 0.0005$	$ u(x_i, 0.5) - \omega_{i,1000} $	$k = 0.01$	$ u(x_i, 0.5) - \omega_{i,50} $
0.0	0.0	0.0		0.0	
0.1	0.00222241	0.00228652	6.411×10^{-5}	8.19876×10^7	8.199×10^7
0.2	0.00422728	0.00434922	1.219×10^{-4}	-1.55719×10^8	1.557×10^8
0.3	0.00581836	0.00598619	1.678×10^{-4}	2.13833×10^8	2.138×10^8
0.4	0.00683989	0.00703719	1.973×10^{-4}	-2.50642×10^8	2.506×10^8
0.5	0.00719188	0.00739934	2.075×10^{-4}	2.62685×10^8	2.627×10^8
0.6	0.00683989	0.00703719	1.973×10^{-4}	-2.49015×10^8	2.490×10^8
0.7	0.00581836	0.00598619	1.678×10^{-4}	2.11200×10^8	2.112×10^8
0.8	0.00422728	0.00434922	1.219×10^{-4}	-1.53086×10^8	1.531×10^8
0.9	0.00222241	0.00228652	6.411×10^{-5}	8.03604×10^7	8.036×10^7
1.0	0.0	0.0		0.0	

Şekil 5.4 : $k = \frac{0.5}{1000}$, $h = \frac{1}{10}$ ve $\lambda = 0.05$ için mutlak hata grafiği(AİFM)

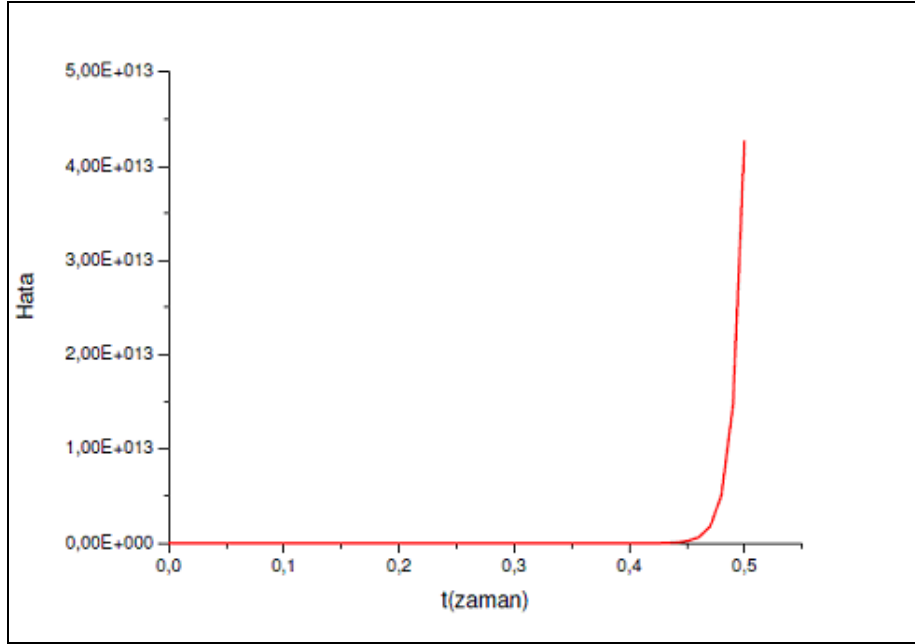


Şekil 5.4' den görüleceği üzere $h = \frac{1}{10}$ ağ aralığı ve $k = \frac{0.5}{1000}$ zaman adımı alındığında

$$\lambda = \frac{k}{h^2} = 0.05 \leq \frac{1}{2}$$

olmakta ve kararlılık koşulunu ($2\lambda \leq 1$) sağlamaktadır.

Şekil 5.5: $k = \frac{0.5}{50}$, $h = \frac{1}{10}$ ve $\lambda = 1.0$ için mutlak hata grafiği(AİFM)

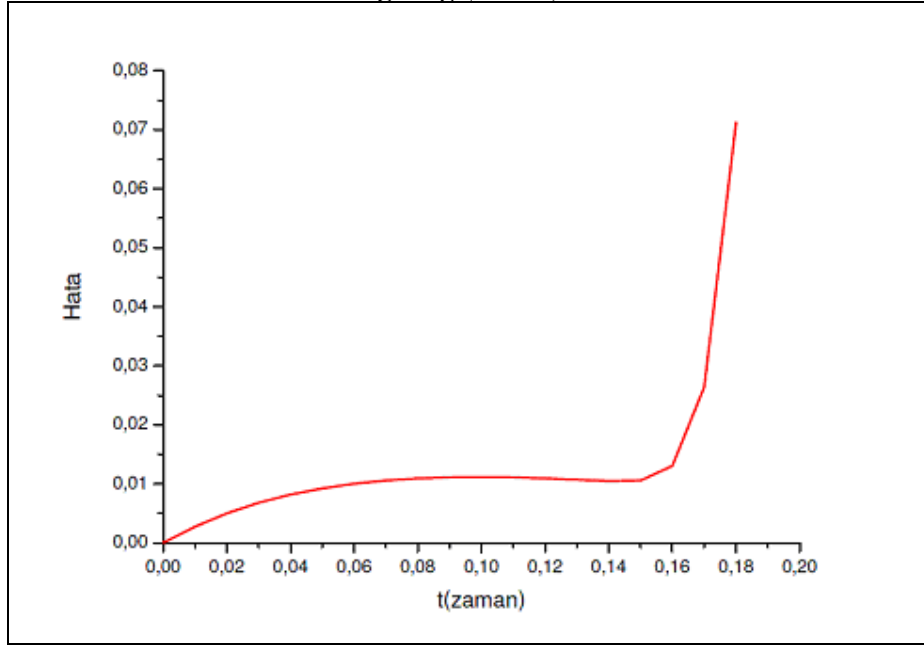


Şekil 5.5 de, $h = \frac{1}{10}$ ağ aralığı ve $k = \frac{0.5}{50}$ zaman adımı alındığında

$$\lambda = \frac{k}{h^2} = 1.0$$

olup, kararlılık koşulu ($2\lambda \leq 1$) ihlal edilmiştir. Bundan dolayı t arttıkça hata da artmaktadır.

Şekil 5.6 : $k = \frac{0.5}{50}$, $h = \frac{1}{10}$ ve $\lambda = 1.0$ için yakınlaştırılmış mutlak hata grafiği(AIFM)



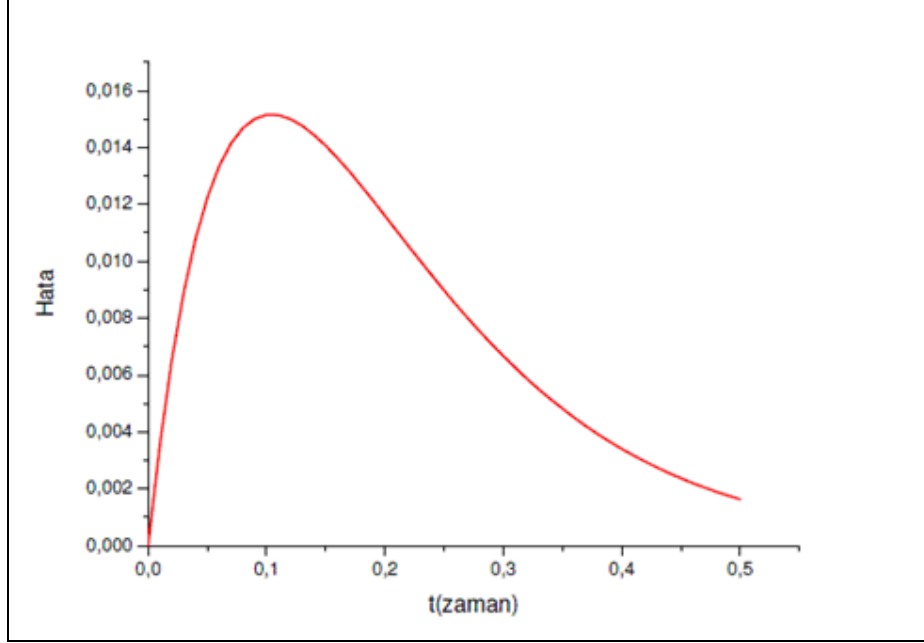
Şekil 5.6'da 0 ile 0.2 aralığında Şekil 5.5 grafiği yakınlaştırılarak çizilmiştir. Hatanın dağılımının daha net bir şekilde gösterilmesi sağlanmıştır. Kararlılık koşulu ihlal edilmiştir.

Örnek 5.2 deki problem geri fark metodu ile ele alındığında elde edilen sonuçlar Tablo 5.3 de görülmektedir.

Tablo 5.3: Isı denklemleri için KGFM ile elde edilen sonuçlar

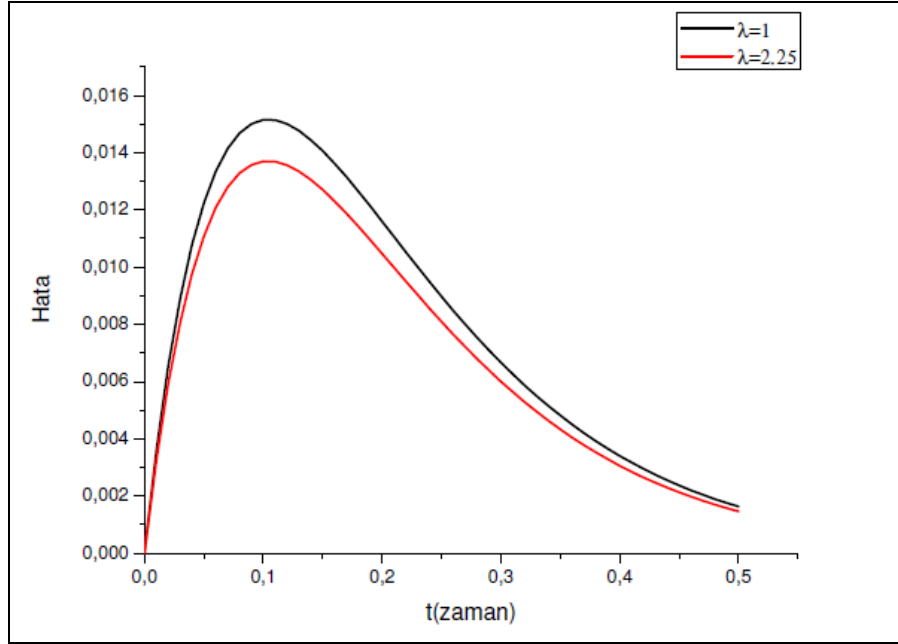
x_i	$u(x_i, 0.5)$	$\omega_{i,50}$ $k = 0.01$	$ u(x_i, 0.5) - \omega_{i,50} $
0.0	0.0	0.0	
0.1	0.00222241	0.00289807	$6.75602978 \times 10^{-4}$
0.2	0.00422728	0.00551236	$1.28507324 \times 10^{-3}$
0.3	0.00581836	0.00758711	$1.76875161 \times 10^{-3}$
0.4	0.00683989	0.00891918	$2.07929227 \times 10^{-3}$
0.5	0.00719188	0.00937818	$2.18629736 \times 10^{-3}$
0.6	0.00683989	0.00891918	$2.07929246 \times 10^{-3}$
0.7	0.00581836	0.00758711	$1.76875197 \times 10^{-3}$
0.8	0.00422728	0.00551236	$1.28507375 \times 10^{-3}$
0.9	0.00222241	0.00289802	$6.75603576 \times 10^{-4}$
1.0	0.0	0.0	

Şekil 5.7 : $k = \frac{0.5}{50}$, $h = \frac{1}{10}$ ve $\lambda = 1.0$ için mutlak hata grafiği(KGFM)



Şekil 5.7 de, $h = \frac{1}{10}$ ağ aralığı ve $k = \frac{0.5}{50}$ zaman adımı alınarak Kapalı Geri Fark Metodu uygulanmıştır. Maksimum hata 1.5×10^{-2} olarak bulunmuştur.

Şekil 5.8: $k = \frac{0.5}{50}$, $\lambda = 1.0$ ve $\lambda = 2.25$ için mutlak hata grafiği (KGFM)



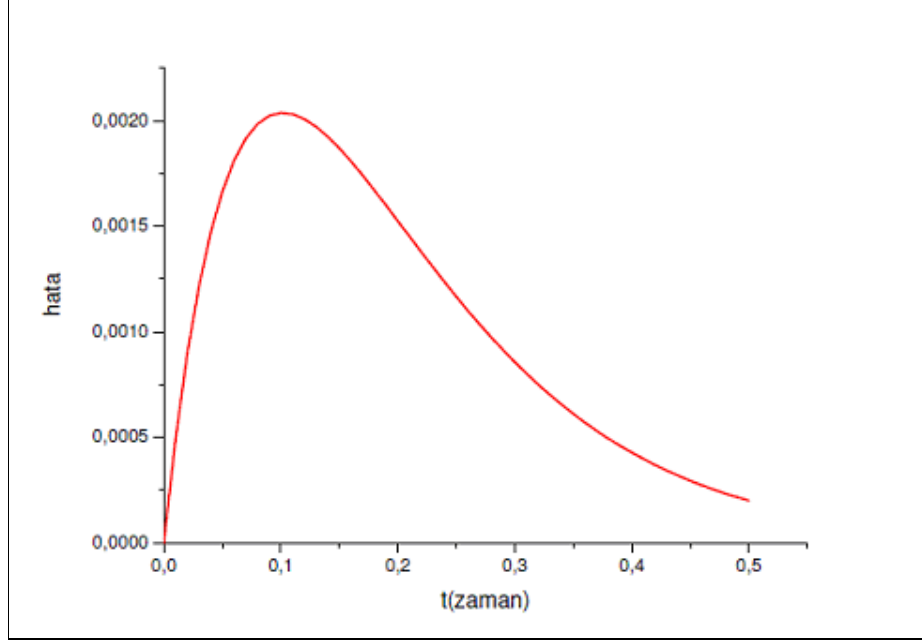
Şekil 5.8 de $h = \frac{1}{10}$ ve $h = \frac{1}{15}$ ağ aralığı ve $k = \frac{0.5}{50}$ zaman adımı olarak alındığında hatalar arasındaki fark görülmektedir. $h = \frac{1}{10}$ iken maksimum hata 1.51×10^{-2} , $h = \frac{1}{15}$ iken maksimum hata 1.36×10^{-2} olarak bulunmuştur.

Örnek 5.2 deki problem Crank Nicolson metodu ile ele alındığında elde edilen sonuçlar Tablo 5.4 de görülmektedir.

Tablo 5.4: Isı denklemleri için CNM ile elde edilen sonuçlar

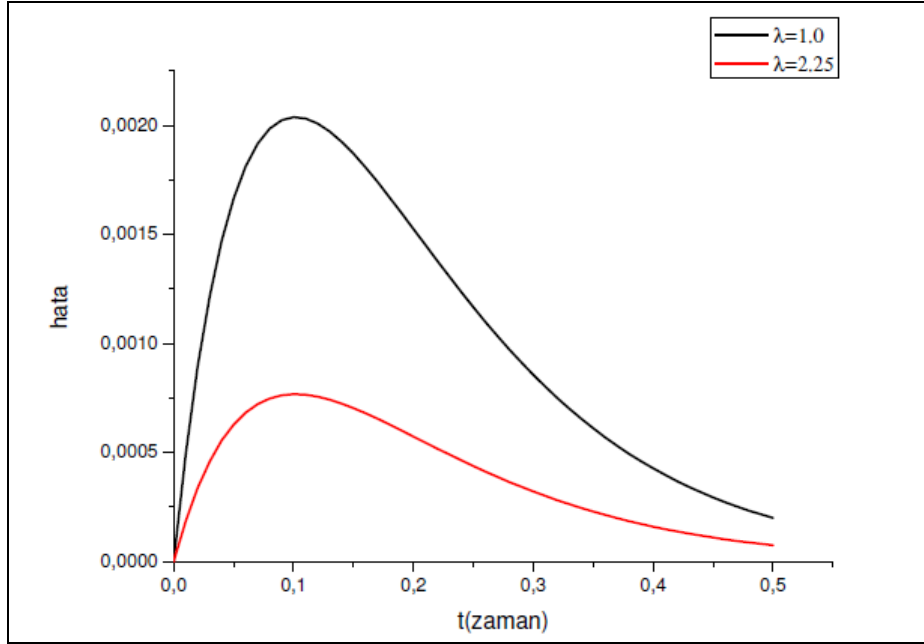
x_i	$u(x_i, 0.5)$	$\omega_{i,50}$	
		$k = 0.01$	$ u(x_i, 0.5) - \omega_{i,50} $
0.0	0.0	0.0	
0.1	0.00222241	0.00230512	$8.27097088 \times 10^{-5}$
0.2	0.00422728	0.00438460	$1.57323227 \times 10^{-4}$
0.3	0.00581836	0.00603489	$2.16536875 \times 10^{-4}$
0.4	0.00683989	0.00709444	$2.54554415 \times 10^{-4}$
0.5	0.00719188	0.00745954	$2.67654433 \times 10^{-4}$
0.6	0.00683989	0.00709444	$2.54554609 \times 10^{-4}$
0.7	0.00581836	0.00603489	$2.16537244 \times 10^{-4}$
0.8	0.00422728	0.00438460	$1.57323735 \times 10^{-4}$
0.9	0.00222241	0.00230512	$8.27103068 \times 10^{-5}$
1.0	0.0	0.0	

Şekil 5.9: $k = \frac{0.5}{50}$, $h = \frac{1}{10}$ ve $\lambda = 1.0$ için mutlak hata grafiği(CNM)



Şekil 5.9 da, $h = \frac{1}{10}$ ağ aralığı ve $k = \frac{0.5}{50}$ zaman adımı alınarak Crank-Nicolson metodu uygulanmıştır. Maksimum hata 2.04×10^{-3} olarak bulunmuştur.

Şekil 5.10: $k = \frac{0.5}{50}$, $\lambda = 1.0$ ve $\lambda = 2.25$ için mutlak hata grafiği (CNM)



Şekil 5.10 da $h = \frac{1}{10}$ ve $h = \frac{1}{15}$ ağ aralığı ve $k = \frac{0.5}{50}$ zaman adımı olarak alındığında hatalar arasındaki fark görülmektedir. $h = \frac{1}{10}$ iken maksimum hata 2.04×10^{-3} , $h = \frac{1}{15}$ iken maksimum hata 7.67×10^{-4} olarak bulunmuştur.

5.3 ELİPTİK DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN ÖRNEK

Genişliği 0,5 metre olan ince metal bir kare tabaka içinde denge durumu için ısı dağılımını belirleyen problemi ele alalım. Komşu iki sınır 0°C de tutulsun ve ısı diğer sınırlarda bir köşeden karşısındaki kenara doğru lineer olarak 0°C den 100°C ye yükselsin. Eğer kenarları x - y eksenleri boyunca sıfır sınır koşullarında yerleştirirsek, bu problem;

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 0.5, \quad 0 < y < 0.5$$

ve sınır koşulları

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 0.5) = 200x$$

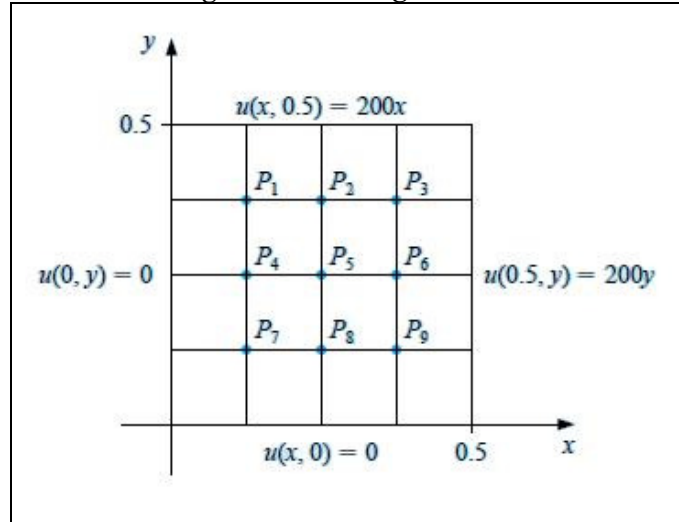
$$u(0, y) = 0, \quad u(0.5, y) = 200y$$

şeklinde olur.

Eğer $n = 4$ ve $m = 4$ ise, problem Şekil 5.11 de verilen ağ şeklinde olur ve fark denklemini;

$$4\omega_{i,j} - \omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j} - \omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1} = 0 \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3$$

Şekil 5.11 Laplace denklemindeki bilinmeyenleri içeren ağ noktalarının gösterimi



Bunun, etiketlenen aralık ağ noktaları $\omega_i = u(P_i)$ cinsinden ifadesi P_i noktalarında denklemleri şu şekilde ifade eder (denklemlerin sağ tarafları sınır koşullarından elde edilir) ;

$$\begin{aligned}
P_1 : & \quad 4\omega_1 - \omega_2 - \omega_4 = \omega_{0,3} + \omega_{1,4} \\
P_2 : & \quad 4\omega_2 - \omega_3 - \omega_1 - \omega_5 = \omega_{2,4} \\
P_3 : & \quad 4\omega_3 - \omega_2 - \omega_6 = \omega_{4,3} + \omega_{3,4} \\
P_4 : & \quad 4\omega_4 - \omega_5 - \omega_1 - \omega_7 = \omega_{0,2} \\
P_5 : & \quad 4\omega_1 - \omega_2 - \omega_4 = \omega_{0,3} + \omega_{1,4} \\
P_6 : & \quad 4\omega_6 - \omega_5 - \omega_3 - \omega_9 = \omega_{4,2} \\
P_7 : & \quad 4\omega_7 - \omega_8 - \omega_4 = \omega_{0,1} + \omega_{1,0} \\
P_8 : & \quad 4\omega_8 - \omega_9 - \omega_7 - \omega_5 = \omega_{2,0} \\
P_9 : & \quad 4\omega_9 - \omega_8 - \omega_6 = \omega_{3,0} + \omega_{4,1}
\end{aligned}$$

Öyle ki, sınır koşulları

$$\begin{aligned}
\omega_{1,0} = \omega_{2,0} = \omega_{3,0} = \omega_{0,1} = \omega_{1,0} = \omega_{0,2} = \omega_{0,3} = 0 \\
\omega_{1,4} = \omega_{4,1} = 25 \\
\omega_{2,4} = \omega_{4,2} = 50 \\
\omega_{3,4} = \omega_{4,3} = 150
\end{aligned}$$

ifade eder.

Bu problemle ilgili olan lineer sistem şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\omega_1 \\
\omega_2 \\
\omega_3 \\
\omega_4 \\
\omega_5 \\
\omega_6 \\
\omega_7 \\
\omega_8 \\
\omega_9
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
25 \\
50 \\
150 \\
0 \\
0 \\
50 \\
0 \\
0 \\
25
\end{bmatrix}$$

Bu matrise Jacobi iterasyon metodu uygulanarak bulunan $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_9$ değerleri Tablo 5.5 de verilmiştir.

Tablo 5.5: Laplace denklemi için AİFM ile elde edilen sonuçlar

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ω_i	18,75	37,50	56,25	12,50	25,00	37,50	6,25	12,50	18,75

Bu problemin analitik çözümü $u(x, y) = 400xy$ olduğu için ve $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$

olduğundan elde edilen bu sayısal değerler için hata sıfırdır.

6. SONUÇ

Bu çalışmada ikinci mertebeden hemen-hemen lineer kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri üzerine çalışılmıştır. Denklemler için sonlu fark çıkarımları yapılmış ve uygun başlangıç sınır koşullarıyla birlikte bu sonlu fark metotlar ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen çözümler hem kendi aralarında hem de analitik çözümleriyle karşılaştırılmıştır. Özel olarak parabolik türden denklemler için açık ileri fark metodu ile kapalı geri fark metodu kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiş, her iki metot için de von Neumann kararlılık analizi yapılmıştır. Elde edilen sonuçların grafik ve tablo sunumları yapılmıştır. Benzer çalışmalar diğer türden denklemler için de uygulanabilir. Buna ilave olarak non-lineer kısmi diferansiyel denklemler için yeni bir çalışma olarak bu çözüm yöntemlerine yeni mevcut yöntemler eklenerek sayısal çözümler incelenebilir.

KAYNAKÇA

Kitaplar

Bayram, M., 2009 *Nümerik analiz*. Birsen Yayınevi ss. 298

Burden, R.L., and Faires J.D, 2002 *Numerical analysis*. Brooks Cole, ss. 573-600

Courant, R., and Hilbert, D., 1962 *Methods of mathematical physics*.

Çağlıyan, M. ve Çelebi, O., 2010 *Kısmi diferansiyel denklemler*. Dora Yayıncılık

Garabedian, R.P., 1963 *Partial differential equations*.

Goldberg, R.R., 1965 *Fourier transforms*. Cambridge University Press: New York

Strikwerda, J. C., 1989 *Finite difference schemes and partial differential equations*.
Wadsworth and Brooks-Cole Publication

Titchmarsh, E. C., 1965 *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Clarendon
Press: Oxford

Diğer Yayınlar

Demir, A.,2012 Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine. *Yüksek Lisans Tezi*. Muğla : Sıtkı Koçman Üniveristesi FBE.

Tellioğlu, R. 2011 beyin tümörlerinin matematiksel modellenmesi ve analizi. *Yüksek Lisans Tezi*. İstanbul : Bahçeşehir Üniversitesi FBE

EKLER

Ek.1 İkinci Mertebeden Denklemler İçin Cauchy Problemi

x, y bağımsız değişkenlerine bağımlı bir $z = z(x, y)$ fonksiyonu için ikinci mertebeden en genel bir kısmi diferansiyel denklem göz önüne alalım ve denklemin

$$t = F(x, y, z, p, q, r, s) \quad \text{Ek.1.1}$$

şeklinde $z_{yy} = t$ türevine göre çözülebildiğini varsayalım. Bir $y = y_0$ değeri için bilinmeyen fonksiyonu ve onun y ye göre türevini önceden tanımlayalım. Yani,

$$\begin{aligned} z(x, y_0) &= f(x) \\ z_y(x, y_0) &= g(x) \end{aligned} \quad \text{Ek.1.2}$$

olsun. (Ek.1.1) denkleminin (Ek.1.2) başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine (Ek.1.1) denklemi için *Cauchy Problemi* denir. Uygulamada özellikle fizikle ilgili bazı problemlerde y bağımsız değişkeni zamanı gösterir ve (Ek.1.2) koşulları $y_0 = 0$ başlangıç anında tanımlanırlar. Böyle bir halde probleme *başlangıç değer problemi* denmektedir. Açıktır ki, başlangıç değer problemi Cauchy probleminin özel bir halidir. (Ek.1.1- Ek.1.2) probleminin çözümünün mevcut ve tek olması için, kuşkusuz F, f ve g fonksiyonları üzerine bazı koşulların yüklenmesi gerekmektedir. Bu alanda, uygulanması kolay klasik bir teorem Cauchy-Kowalewski teoremidir.

Teorem Ek1.1

Eğer F fonksiyonu, $z_0 = f(x_0)$, $p_0 = f'(x_0)$, $q_0 = g(x_0)$, $r_0 = f''(x_0)$ ve $s_0 = g'(x_0)$ olmak üzere, $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0)$ noktası komşuluğunda x, y, z, p, q, r, s değişkenlerinin ve f, g de x_0 noktası komşuluğunda x değişkeninin analitik fonksiyonları ise, (Ek.1.1- Ek.1.2) Cauchy probleminin (x_0, y_0) noktası komşuluğunda analitik bir ve yalnız bir $z = z(x, y)$ çözümü vardır.

Yerel bir teorem olan bu teoremin ispatı için, Courant & Hilbert (1962) ve Garabedian (1963).

Ek.2 Dalga Denklemi İçin Fortran Kodu(AİFM)

C// DALGA DENKLEMİ İLERİ FARK METODU $f(x)=2\sin(3pix)$ ve

C// $g(x)=-12\sin(2pix)$ için

```
DOUBLE PRECISION x(11),u(11,21),t(21),lamda,h,k,g(9)
```

```
DOUBLE PRECISION v(11,21),err(21),a(21)
```

```
INTEGER c
```

```
OPEN(41,file='YAKLAŞIKÇÖZÜM.dat',status='old')
```

```
OPEN(42,file='ANALİTİKÇÖZÜM.dat',status='old')
```

```
OPEN(43,file='HATA.dat',status='old')
```

```
REWIND(41)
```

```
REWIND(42)
```

```
REWIND(43)
```

```
pi=4.0d0*atan(1.0d0)
```

```
c=2
```

```
n=10
```

```
h=1.0d0/n
```

```
m=20
```

```
k=1.0d0/m
```

```
lamda=k*c/h
```

```
C// ZAMAN ARALIĞI VE SINIR KOŞULLARI
```

```
DO i=1,21
```

```
t(i)=(i-1)*k
```

```
u(1,i)=0.0d0
```

```
u(11,i)=0.0d0
```

```
END DO
```

```
C//X DEĞERLERİ
```

```
DO i=1,11
```

```
x(i)=(i-1)*h
```

```
END DO
```

```
C//t=0 İÇİN BAŞLANGIÇ KOŞULLARI
```

```
DO i=1,11
```

```
u(i,1)=2.0d0*sin(3.0d0*pi*x(i))
```

```

END DO
C//BAŞLANGIÇ HIZ KOŞULUNDAN ELDE EDİLİR Kİ;
DO i=2,10
g(i)=-12.0d0*sin(2.0d0*pi*x(i))
u(i,2)=(lamda**2/2)*(u(i+1,1)+u(i-1,1))+((1-lamda**2)*u(i,1))
&-k*g(i)
END DO
C//FARK METODUYLA YAKLAŞIK HESAPLAMALAR
DO 10 j=2,21
DO 20 i=2,10
u(i,j+1)=(lamda**2)*(u(i+1,j)+u(i-1,j))
&+((2*(1-(lamda**2)))*u(i,j))-u(i,j-1)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
C// X ANALİTİK ÇÖZÜM İÇİN X DEĞERLERİNİN YENİDEN GİRİŞİ
DO i=1,11
x(i)=(i-1)*h
END DO
C// ANALİTİK ÇÖZÜM
DO j=1,21
DO i=1,11
v(i,j)=2.0d0*cos(6.0d0*pi*t(j))*sin(3.0d0*pi*x(i))
&-(3.0d0/pi)*sin(4.0d0*pi*t(j))*sin(2.0d0*pi*x(i))
END DO
END DO
DO j=1,21
a(j)=0.0d0
DO i=1,11
WRITE (41,*) t(j),x(i),u(i,j)
WRITE (42,*) t(j),x(i),v(i,j)
a(j)=a(j)+((u(i,j)-v(i,j))**2)
END DO

```

```
err(j)=SQRT(a(j)/n)
WRITE(43,*) t(j),err(j)
END DO
END PROGRAM
```

Ek.3 Isı Denklemi İçin Fortran Kodu (İAFM)

C// ISI DENKLEMİ İLERİ FARK METODU $k=0.01$ İÇİN

```
PROGRAM ISI DENKLEMİ
DOUBLE PRECISION x(11),u(11,51),t(51)
DOUBLEPRECISION v(11,51),a(51),err(51)
DOUBLE PRECISION lamda,h,k
OPEN(11,file='YAKLAŞIKÇÖZÜM.dat',status='old')
OPEN(12,file='ANALİTİKÇÖZÜM.dat',status='old')
OPEN(13,file='HATA.dat',status='old')
REWIND(11)
REWIND(12)
REWIND(13)
pi=4.0d0*ATAN(1.0d0)
n=10
h=1.0d0/n
m=50
k=0.5d0/m
lamda=k/(h*h)
C// ZAMAN ARALIĞI VE SINIR KOŞULLARI
DO i=1,51
t(i)=(i-1)*k
u(1,i)=0.0d0
u(11,i)=0.0d0
END DO
C//X DEĞERLERİ
DO i=1,11
x(i)=(i-1)*h
END DO
C//T=0 İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞERLERİ
DO i=1,11
u(i,1)=SIN(pi*x(i))
END DO
```

```

DO j=1,51
DO i=2,10
u(i,j+1)=lamda*(u(i+1,j)+u(i-1,j))+((1-2*lamda)*u(i,j))
END DO
END DO
C//X DEĞERLERİNİN YENİDEN GİRİŞİ
DO i=1,11
x(i)=(i-1)*h
END DO
C//ANALİTİK ÇÖZÜM
DO j=1,51
DO i=1,11
v(i,j)=SIN(pi*x(i))*EXP(-pi**2*t(j))
END DO
END DO
DO j=1,51
a(j)=0.0d0
DO i=1,11
WRITE (11,*) t(j),x(i),u(i,j)
WRITE(12,*) t(j),x(i),v(i,j)
a(j)=a(j)+((v(i,j)-u(i,j))**2)
END DO
err(j)=SQRT(a(j)/n)
WRITE(13,*) t(j),err(j)
END DO
END PROGRAM

```

Ek.4 Isı Denklemi İçin Fortran Kodu (KGFM)

C//ISI DENKLEMİ İÇİN GERİ FARK METODU M=10 İÇİN

```
DOUBLE PRECISION t,h,k,lamda,a,b
DOUBLE PRECISION w(10),u(10),l(10),z(10),x(10),v(10)
DOUBLE PRECISION err(50),top(50)
OPEN(61,file='YAKLAŞIKÇÖZÜM.dat',status='old')
OPEN(62,file='ANALİTİKÇÖZÜM.dat',status='old')
OPEN(63,file='HATA.dat',status='old')
REWIND(61)
REWIND(62)
REWIND(63)
pi=4.0d0*ATAN(1.0d0)
b=1.0d0
a=0.5d0
c=1
m=10
n=50
h=b/m
k=a/n
lamda=((c**2)*k)/(h**2.0d0)
WRITE(*,*) lamda
C//X DEĞERLERİ VE BAŞLANGIÇ KOŞULU
DO i=1,m-1
x(i)=(i)*h
w(i)=SIN(pi*x(i))
END DO
l(1)=1.0d0+(2.0d0*lamda)
u(1)=(-lamda)/l(1)
DO i=2,m-2
l(i)=1.0d0+(2.0d0*lamda)+(lamda*u(i-1))
u(i)=-lamda/l(i)
END DO
```



```

l(m-1)=1.0d0+(2.0d0*lamda)+(lamda*u(m-2))
DO j=1,n
top(j)=0.0d0
t=j*k
z(1)=w(1)/l(1)
DO i=2,m-1
z(i)=(w(i)+lamda*z(i-1))/l(i)
END DO
w(m-1)=z(m-1)
DO i=m-2,1,-1
w(i)=(z(i)-(u(i)*w(i+1)))
END DO
DO i=1,m-1
v(i)=EXP(-pi**2*t)*SIN(pi*x(i))
top(j)=top(j)+(v(i)-w(i))**2
WRITE(61,*)t,x(i),w(i)
WRITE(62,*)t,x(i),v(i)
END DO
err(j)=SQRT((top(j)/(m-1)))
WRITE(63,*) t,err(j)
END DO
END DO

```

Ek.5 Isı Denklemi İçin Fortran Kodu (CNM)

C//ISI DENKLEMİ CRANCK NİCOLSON METODU $k=0.01$ İÇİN

```
PROGRAM ISI DENKLEMİ
DOUBLE PRECISION x(10),u(10),l(10),z(10),w(10),v(10)
DOUBLEPRECISION err(50),top(50)
DOUBLE PRECISION lamda,h,k
OPEN(101,file='YAKLAŞIKÇÖZÜM.dat',status='old')
OPEN(102,file='ANALİTİKÇÖZÜM.dat',status='old')
OPEN(103,file='HATA.dat',status='old')
REWIND(101)
REWIND(102)
REWIND(103)
pi=4.0d0*ATAN(1.0d0)
b=1.0d0
a=0.5d0
c=1.0d0
m=10
n=50
h=b/m
k=a/n
lamda=((c**2)*k)/(h**2)
WRITE(*,*) lamda
C//X DEĞERLERİ VE BAŞLANGIÇ KOŞULU
DO i=1,m-1
x(i)=(i)*h
w(i)=SIN(pi*x(i))
END DO
l(1)=1+lamda
u(1)=(-lamda)/(2*l(1))
DO i=2,m-2
l(i)=1+lamda+(lamda*u(i-1))/2.0d0
u(i)=(-lamda)/(2*l(i))
```

```

END DO
l(m-1)=1+lmda+(lamda*u(m-2))/2
DO j=1,n
top(j)=0.0d0
t=j*k
z(1)=((1-lamda)*w(1)+(lamda/2)*w(2))/l(1)
DO i=2,m-1
z(i)=((1-lamda)*w(i)+(lamda/2)*(w(i+1)+w(i-1)+z(i-1)))/l(i)
END DO
w(m-1)=z(m-1)
DO i=m-2,1,-1
w(i)=z(i)-(u(i)*w(i+1))
END DO
DO i=1,m-1
v(i)=EXP(-pi**2*t)*SIN(pi*x(i))
top(j)=top(j)+(v(i)-w(i))**2
WRITE(101,*)t,x(i),w(i)
WRITE(102,*)t,x(i),v(i)
END DO
err(j)=SQRT((top(j)/(m-1)))
WRITE(103,*)t,err(j)
END DO
END PROGRAM

```

Ek.6 Laplace Denklemi İçin Fortran Kodu (AİFM)

C// LAPLACE İÇİN İLERİ FARK METODU $f(x)=0$ İÇİN

```
PROGRAM LAPLACE
DOUBLE PRECISION x(5),u(5,5),y(5),g(5,5)
DOUBLE PRECISION v(5,5),err(5,5)
DOUBLE PRECISION lamda,h,k,mü,norm
OPEN(51,file='YAKLAŞIKÇÖZÜM.dat',status='new')
OPEN(52,file='ANALİTİKÇÖZÜM.dat',status='new')
OPEN(53,file='HATA.dat',status='new')
REWIND(51)
REWIND(52)
REWIND(53)
n=4
h=0.5d0/n
m=4
k=0.5d0/m
lamda=(h/k)**2
mü=2*(1+lamda)
l=1
eps=1.0e-06
DO i=1,n+1
x(i)=(i-1)*h
END DO
DO j=1,m+1
y(j)=(j-1)*k
END DO
DO i=1,n+1
DO j=1,m+1
u(i,j)=0.0d0
END DO
END DO
DO i=1,n+1
```

```

g(1,i)=0.0d0
g(5,i)=200.d0*y(i)
END DO
DO i=1,n+1
g(i,1)=0.0d0
g(i,5)=200.d0*x(i)
END DO
C// JACOBI İTERASYONU
11 z=(g(1,m)+(lamda*g(2,m+1))+(lamda*u(2,m-1))+u(3,m))/mü
norm=ABS(z-u(2,m))
u(2,m)=z
DO i=3,n-1
z=((lamda*g(i,m+1))+u(i-1,m)+u(i+1,m)+(lamda*u(i,m-1)))/mü
IF (ABS(u(i,m)-z).gt.norm) THEN
norm=ABS(u(i,m)-z)
END IF
u(i,m)=z
END DO
z=(g(n+1,m)+(lamda*g(n,m+1))+u(n-1,m)+(lamda*u(n,m-1)))/mü
IF (ABS(u(n,m)-z).gt.norm) THEN
norm=ABS(u(n,m)-z)
END IF
u(n,m)=z
DO j=m-1,3
z=(g(1,j)+(lamda*u(2,j+1))+(lamda*u(2,j-1))+u(3,j))/mü
IF (ABS(u(2,j)-z).gt.norm) THEN
norm=ABS(u(2,j)-z)
END IF
u(2,j)=z
DO i=3,n-1
z=(u(i-1,j)+(lamda*u(i,j+1))+u(i+1,j)+(lamda*u(i,j-1)))/mü
IF (ABS(u(i,j)-z).gt.norm) THEN

```

```

norm=ABS(u(i,j)-z)
END IF
u(i,j)=z
z=(g(5,j)+u(n-1,j)+(lamda*u(n,j+1))+(lamda*u(n,j-1)))/mü
IF (ABS(u(n,j)-z).gt.norm) THEN
norm=ABS(u(n,j)-z)
END IF
u(n,j)=z
END DO
END DO
z=(g(1,2)+lamda*g(2,1)+(lamda*u(2,3))+(lamda*u(3,2)))/mü
IF (ABS(u(2,2)-z).gt.norm) THEN
norm=ABS(u(2,2)-z)
END IF
u(2,2)=z
DO i=3,n-1
z=((lamda*g(i,1))+u(i-1,2)+(lamda*u(i,3))+u(i+1,2))/mü
IF (ABS(u(i,2)-z).gt.norm) THEN
norm=ABS(u(i,2)-z)
END IF
u(i,2)=z
END DO
z=(g(5,2)+(lamda*g(n,1))+(lamda*u(n-1,2))+(lamda*u(n,3)))/mü
IF (ABS(u(n,2)-z).gt.norm) THEN
norm=ABS(u(n,2)-z)
END IF
u(n,2)=z
IF (norm.lt.eps) THEN
DO i=2,n
DO j=2,m
WRITE(*,*) x(i),y(j),u(i,j)
WRITE(51,*) x(i),y(j),u(i,j)

```

```

END DO
END DO
ELSE
l=l+1
GO TO 11
END IF
C //ANALİTİK ÇÖZÜM
DO j=1,5
DO i=1,5
v(i,j)=400.0d0*x(i)*y(j)
END DO
END DO
DO i=2,n
DO j=2,m
C// HATA
err(i,j)=ABS(u(i,j)-v(i,j))
WRITE(*,*) x(i),y(j),v(i,j)
write(52,*) x(i),y(j),v(i,j)
WRITE(53,*) x(i),y(j),err(i,j)
END DO
END DO
END PROGRAM

```