T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

DEĞİŞMELİ CEBİRLER VE KOCEBİRLER İÇİN HOPKİNS-LEVİTZKİ TEOREMİ

Yüksek Lisans Tezi

AYŞE DENİZ GÖZEN

İSTANBUL, 2013

T.C.

BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYGULAMALI MATEMATİK

DEĞİŞMELİ CEBİRLER VE KOCEBİRLER İÇİN HOPKİNS-LEVİTZKİ TEOREMİ

Yüksek Lisans Tezi

AYŞE DENİZ GÖZEN

Tez Danışmanı: Doç.Dr. ATABEY KAYGUN

İSTANBUL, 2013

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK

Tezin Adı: DEĞİŞMELİ CEBİRLER VE KOCEBİRLER İÇİN HOPKİNS-LEVİTZKİ TEOREMİ
Öğrencinin Adı Soyadı: Ayşe Deniz GÖZEN
Tez Savunma Tarihi: 11.01.2013

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğu Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

Doç.Dr. Tunç BOZBURA
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları yerine getirmiş olduğunu onaylarım.

Prof.Dr. Nuri KURUOĞLU
Program Koordinatörü

Bu Tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli görülmüş ve kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmzalar
Tez Danışmanı Doç.Dr. Atabey KAYGUN	---------------------------------
Üye Prof. Dr. İrini DİMİTRİYADİS	---------------------------------
Üye Yrd. Doç. Dr. Süreyya Akyüz	---------------------------------

ÖZET

DEĞİŞMELİ CEBİRLER VE KOCEBİRLER İÇİN HOPKİNS-LEVİTSKİ TEOREMİ

Ayşe Deniz GÖZEN

UYGULAMALI MATEMATİK

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Atabey KAYGUN

Şubat 2013, 69 sayfa

Bu tezde, literatürde cebirler için ispat edilmiş Hopkins-Levitzki Teoremi (1939) kocebirler için ispat edilmiştir. Tezde kocebir yapısı temelden inşa edilmiş ve çok sayıda örneğe de yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Değişmeli Cebir, Hopkins-Levitzki Teoremi, Artinyan Cebir, Noetheryan Cebir, Kocebir.

ABSTRACT

HOPKİNS-LEVİTZKİ THOREM İN COMMUTATİVE ALGEBRA AND COALGEBRA

Ayşe Deniz GÖZEN

Department of Mathematics

Thesis Supervisor: Doç.Dr. Atabey KAYGUN

February 2013, 69 pages

In this thesis, a version of Hopkins-Levitzki Theorem (1939) is proved for coalgebras, which was originally proved for algebras. Coalgebras are constructed from the basic principles and many examples are given in full detail.

Keywords: Commutative Algebra, Hopkins-Levitski Theorem, Artinian Algebra, Noetherian Algebra, Coalgebra.

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

Bu tez soyut cebir üzerine yapılmış bir çalışmadır. Tezin genel amacı bilinen cebirsel bir problemi ele almak ve ardından bu problemin bir benzerini kocebirsel yapılarda incelemektir. İlgilendiğimiz cebirsel problem Hopkins-Levitzki Teoremi'dir.

Hopkins-Levitski teoremi modüller ve halkalar üzerinde oluşan artan ve azalan zincirler arasında sıkı bir ilişki olduğunu ifade eder. Genel simetri prensibi bir modül üzerindeki artan bir alt modül zinciri ile azalan bir alt modül zincirinin genel olarak benzer özellikleri göstermesini gerektirir. Ancak Hopkins-Levitski Teoremi bize azalan her alt modül zinciri bir zaman sonra sabitleniyorsa (yani modül artinyen ise) bu modülün artan her alt modül zincirlerinin de bir zaman sonra sabitlendiğini (yani noetheryen bir modül olduğunu) ispatlar. Bu teorem çift taraflı bir önerme değildir. Yani Noetheryan bir modül artinyan olmak zorunda değildir. Oysa benzer bir oluşum göstermesi beklenen azalan ve artan zincirler farklı prensiplerle çalışmaktadır. Hopkins-Levitzki teoremi bu simetrinin cebirler için bozulduğunu göstermesi yüzünden cebirler için önemlidir. Özetle aktardığımız teorem daha geniş anlamda semi-primary halkalar için üç denkliği ele alır; (1) halka üzerinde tanımlanan bir M modülün semi-primary olması, (2) bu modülün kompozisyon serisi olması ve (3) bu modülün noetheryan ve artinyan olması. Bu detaylı teoremin ispatı için gerekli çalışmalar tez boyunca ele alınmıştır.

Tezin ikinci aşamasında kocebirsel yapılar ele alınmıştır. Bu tezin en önemli bölümüdür. Kocebirlerle ilgili araştırmamız esnasında Türkçe matematik literatüründe kocebirler üzerinde bir çalışmaya rastlayamadık. Bu şekliyle bu tez Türkçe yazılmış ilk kocebir araştırmaları arasındadır. Bu amaçla elimizdeki örnek kocebirlerin inşaa edilmesini detaylı bir şekilde ele aldık. Bir kocebir tanımlayabilmek için gerekli tüm alt yapı tezde ele alınmıştır. Kocebirlerle ilgili örnekler konunun anlaşılması açısından büyük önem taşımaktadır. Bir çok örneği ayrıntılı bir şekilde çözdük. Bu yüzden tez genel olarak Türkçe matematik literatüründe az rastlanır bir konu üzerine yapılmış olup, tezin daha sonra bu konuda yapılacak Türkçe çalışmalara iyi bir referans örneği oluşturması hedeflenmektedir.

KISA TARİH

Hopkins-Levitski teoremi ilk olarak değişmeli olmayan cebirler için Charles Hopkins ve Jacob Levitzki tarafından 1939 yılında, birbirlerinden bağımsız olarak ispatlanmıştır. Teorem sağ artinyan halkaların aynı zamanda sağ noetheryan olduğunu belirtir. Ancak bundan bir kaç yıl önce Yasuo Akizuki teoremi değişmeli cebirler üzerinde ispatlamıştır. 1970 ve 1980 yıllarında teorem Shock tarafından birimi olmayan halkalara uygulanmıştır. Teorem, Miller-Teply tarafından modüllerde bir mirasçı burkum yapısına (hereditary torsion theory) göreli olan azalan modüller zincirlerine uygulanmış, Nastasescu tarafından Grothendieck Kategorilerine genellenmiştir. Hopkins-Levitski teoremi artan ya da azalan zincirler arasında bağlantı kurduğu için matematiksel pek çok yapıda büyük öneme sahiptir. Bu teoremi cebirler, modüller, halkalar ve kafesler (lattice) üzerinde inceleyebiliriz. Aynı zamanda değişmeli ve değişmeli olmayan cebirler ve halkalar için ispatlanabilir.

TEZİN YAPISI

Tezin 2. bölümünün birinci alt bölümünde vektör uzayları ve cebirler üzerine çalışılmış; bir vektör uzayı üzerinde tensör çarpımı tanımlanmış ve bir vektör uzayının dulaninin tanımı yapılmıştır. Vektör uzayı ve duali ile ilgili ihtiyaç duyacağımız sonuçlara yer verilmiştir. 2. bölümün ikinci alt bölümünde değişmeli halka ve modül tanımlarına yer verilmiş halka ve modüllerle ilgili temel teoremler ispatlanmıştır. 2. bölümün üçüncü alt bolünde idealler, asal idealler ve maksimal ideller üzerine çalışılmış, temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ardından 2. bölümün dördüncü alt bölümlerinde Jacobson Radikal tanımı, yarı basit halkalar, nil ideal ve nilpotent ideal tanımlarına yer verilmiş, temel teoremler ele alınıp ispatlanmıştır. 2. bölümün beşinci alt bölümünde noetheryan ve artinyan modül ve değişmeli halkalar ele alınmış, tanım ve teoremlerine yer verilmiştir aynı bölümde kompozisyon serileri ve J-yarı basit halkalar tanımlanmıştır. Temel teoremin ispatlanması için gerekli tüm tanım ve teoremlere bu alt bölümlerde yer verildiği için 2. bölümün son bölümünde Hopkins-Levirski Teoreminin ispatı yapılmıştır. Bu bölümdeki sonuçlar literatürde bilinmektedir ancak ispatların büyükçe bir kısmı metnin tutarlılığını sağlamak için ulaşmak istediğimiz sonuçlar ışığında yeniden yapılmıştır.

Tezin 3. bölümünde kocebirler işlenmiştir. Kocebirlerin oluşumu ile ilgili gerekli tanım ve teoremler 2. bölümün birinci alt bölümünde ele alınmıştır; vektör uzayları ve vektör uzaylarının dualleri işlenmiş, ardından 3. bölümde kocebir tanımlanmıştır. Bir kocebirin nasıl oluştuğu, özellikleri ve temel özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca 3. bölümde kocebir ile ilgili örneklere geniş yer verilmiştir. Bu örnekler kocebiri daha iyi anlamamız için teker teker ayrıntılı bir şekilde çözülmüştür. Ana sonuçlar literaürde olmasına rağmen örnekler tutarlı ve ayrıntılı bir şekilde temelden kurulmuştur.

Tezin 3. bölümünün ikinci alt bölümü, Hopkins-Levitski Teoremi'nin kocebirler için uyarlanması ve kocebirlerde ispatıdır. Bunun için bir kocebir üzerinde artan ve azalan koideal zincirleri tanımlanmış ve teorem ispatı için kategori teori kullanılmıştır. Bunun için kocebirlere ait problemimiz cebirlere çekilmiş ispat yapılmış ve ardından tekrar kocebirlerde ifade edilmiştir. Ancak ispatın yapılabilmesi için bütün vektör uzayları sonlu boyutlu olması gerekmektedir.

TEŞEKKÜR

Tezin her aşamasında bana yol gösteren, destek olan ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Atabey KAYGUN'a teşekkürlerimi sunarım.

2 DEĞİŞMELİ CEBİRLER İÇİN HOPKİNS LEVİTZKİ TEOREMİ

Bu bölümde değişmeli cebirler için Hopkins-Levintzki teoreminin kanıtı yapılacaktır. Kanıtı yapabilmek için gerekli olan tanım ve teoremlere öncelikli olarak yer verilecektir. Bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe bütün halkalar birimli ve değişmeli ve bütün vektör uzayları sonlu boyutlu olarak ele alınacaktır.

2.1 VEKTÖR UZAYI VE CEBİRLER

Bu bölümde vektör uzayı ve cebir tanımları yapılıp, konu ile ilgili gerekli teoremlere yer verilecektir.

2.1.1 Tanım [11, 5.1]

$(V,+)$ değişmeli bir grup ve $(k,+,\cdot)$ bir cisim olsun.

$$f : k \times V \to V;\ a \in k \ ve\ v \in V$$

için

$$f(a,v) = av$$

olarak tanımlanan ve skalerle çarpma adını vereceğimiz bu f fonksiyonu için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa, V değişmeli grubuna k üzerinde vektör uzayı veya kısaca k-uzay denir.

Her $a,b \in k$ ve $v,w \in V$ için

V1) $(ab)v = a(bv)$

V2) $a(v+w) = av + aw$

V3) $(a+b)v = av + bv$

V4) k-uzayın birim elemanı 1 olmak üzere $1v = v$

olur.

2.1.2 Örnek

1. F bir cisim olmak üzere $F^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in F \ ve\ 1 \leq i \leq n\}$ kümesi F cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

2. F bir cisim olmak üzere $F_n[x] = \{a_0 + a_1x+, \ldots, a_nx^n : a_i \in F\}$ kümesi F cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

2.1.3 Tanım [11, 5.3]

V, k cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq U$, V'nin herhangi bir alt kümesi olsun. Eğer U, V'de tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemine göre bir vektör uzayı teşkil ederse U'ya V'nin bir alt vektör uzayı ya da kısaca alt uzayı denir.

2.1.4 Teorem ve Tanım [11, 5.5]

V, k cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı ve $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, V vektör uzayının sonlu bir alt kümesi olsun. Eğer $U = \{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i : \lambda_i \in k\}$ ise U kümesi V'nin bir alt uzayıdır. U alt uzayına A kümesi tarafından gerilen (ya da üretilen) alt uzay denir ve $U = \langle A \rangle$ yada $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle$ ile gösterilir. A'nın elemanlarına gerenler yada üreteçler denir.

2.1.5 Tanım [11, 5.5]

V, k cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı ve $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subseteq V$ ise $\lambda_i \in k$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$ ifadesine A kümesinin bir lineer kombinasyonu denir.

2.1.6 Tanım [11, 5.6]

V, k cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı ve $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, V'nin bir alt kümesi olsun. Eğer $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in k$ varsa, A kümesine k cismi üzerinde lineer bağımlıdır denir. Eğer $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0$ olması her $i = 1, 2, \ldots m$ için $\lambda_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa o zaman A kümesine k cismi üzerinde lineer bağımsızdır denir.

2.1.7 Tanım [11, 5.7]

V, k cismi üzerinde tanımlanmış vektör uzayı ve $\emptyset \neq A$, V'nin bir alt uzayı olsun. Buna göre aşağıdaki şartlar sağlanırsa $A \subseteq V$ alt uzayına V'nin bir bazı veya tabanı denir ve $V = SpanA$ ile gösterilir.

1. A alt uzayı lineer bağımsızdır.

2. A alt kümesi V'yi gerer yani üretecidir.

Bu durumda A alt uzayının eleman sayısı V'nin boyutu olup $boyV$ ile gösterilir.

2.1.8 Tanım

V ve W, k üzerine iki vektör uzayı olsun. $V = Span(A)$ ve $W = Span(B)$ bu vektör uzaylarının bazları olsun. O zaman her $v \in V$ ve bir $\lambda_a \in k$ için $v = \sum_{a\in A} \lambda_a a$ ve her $w \in W$ ve bir $\beta_b \in k$ için $w = \sum_{b\in B} \beta_b b$ olur. Eğer A ve B bazları sonsuz ise o zaman $\lambda_a \neq 0$ ve $\beta_b \neq 0$ sadece sonlu sayıdaki A ve B bazları için geçerlidir.

2.1.9 Tanım [7, 5.9.1]

V ve W, k üzerine iki vektör uzayı olsun. $V = Span(A)$ ve $W = Span(B)$ bu vektör uzaylarının bazları olsun. $V \oplus W$, k üzerine bazı $A \sqcup B$ $(A \cap B = \emptyset)$ olan vektör uzayında her $x \in V \oplus W$, her $a \in A$ ve her $b \in B$ için öyle bir $\lambda_a, \beta_b \in k$ vardır ki

$$x = \sum_{a\in A} \lambda_a a + \sum_{b\in B} \beta_b b$$

olur ve $V \oplus W$ ifadesine V ve W'nin direk toplamı denir. Eğer $boy(V) = n < \infty$ ve $boy(W) = m < \infty$ ise $boy(V \oplus W) = n + m$ olur.

2.1.10 Tanım [11, 5.10]

V ve W, k cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı olsun. Eğer $L : V \to W$ fonksiyonu her $v_1, v_2 \in V$ ve $a, b \in k$ için $L(av_1 + bv_2) = aL(v_1) + bL(v_2)$ şartını sağlıyorsa o zaman bu fonksiyona k-lineer veya lineer dönüşüm denir. L lineer dönüşümü bire bir ve üzerine ise V ve W izomorf vektör uzayılarıdır, L'ye k-lineer izomorfizma denir.

L lineer dönüşümünün görüntüsü $v \in V$ için $L(v) = w$ olacak şekilde $w \in W$ elemanlarının kümesi olarak tanımlanır ve ImL olarak gösterilir. Yani $ImL = \{w : L(v) = w, v \in V \text{ için}\}$ olur.

L lineer dönüşümünün çekirdeği $L(v) = 0$ olacak şekilde $v \in V$ elemanlarının kümesi olarak tanımlanır ve $çekL$ olarak gösterilir. Yani $çekL = \{v : L(v) = 0\}$ dır.

2.1.11 Not [7, 8.1.1]

V ve W, k üzerine iki vektör uzayı olsun. $V = Span(A)$ ve $W = Span(B)$ bu vektör uzaylarının bazları olsun. Eğer $g : V \to W$ dönüşümü bir k-lineer vektör uzayı homomorfizması ise o zaman W'nin tüm değerleri g'nin V vektör uzayının bazı üzerindeki değerleri ile belirlenir. Yani her $v \in V$, her $a \in A$ ve öyle bir $\lambda_a \in k$ için $v = \sum_{a \in A} \lambda_a a$ 'dır.

$$\begin{aligned} g(v) &= g(\sum_{a \in A} \lambda_a a) \\ &= \sum_{a \in A} \lambda_a g(a) \end{aligned}$$

olur. $g(v)$ vektörü $g(a)$ fonksiyonuna göre yani $a \in A$ bazına göre belirlenir.

2.1.12 Teorem [7, 5.8.8]

V, n boyutlu bir k vektör uzayı olsun ($boyV = n$). $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ lineer bağımsız alt uzay olmak üzere öyle $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n \in V$ elemanları vardır ki $G \cup (a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n)$, V'nin bir bazı olur.

İspat: G kümesi, V vektör uzayının bir alt uzayı ve $Span(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\} = W_r$ olsun. $G \subseteq V$ olup $Span(G)$, G'yi içeren en dar alt uzay olur. $W_r = V$ ise aranan baz G olur. $W_r \neq V$ ise öyle bir $a_{r+1} \in V$ vardır ki $a_{r+1} \notin G$ olur. $G \cup \{a_{r+1}\}$ lineer bağımsızdır.

Gerçekten $c_1, \ldots c_r, c_{r+1} \in k$ için

$$c_1 a_1 + \ldots + c_r a_r + c_{r+1} a_{r+1} = 0$$

halinde $c_1 = \ldots = c_r = c_{r+1} = 0$ olup, $G \cup \{a_{r+1}\}$ lineer bağımsız olur. $c_{r+1} \neq 0$ olamaz, aksi halde, yani $c_{r+1} \neq 0$ ise

$$a_{r+1} = {}^1/_{c_{r+1}} (c_1 a_1 + \ldots + c_r a_r) \in W_r$$

olup a_{r+1} tanımı ile çelişir. Şimdi $W_{r+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}\}$ ve $G_{r+1} = G \cup \{a_{r+1}\}$ diyelim. $W_{r+1} = V$ ise G_{r+1} tamamlanmış bazdır. $W_{r+1} \neq V$ ise bir önceki adım tekrarlanır. $boyV = n$ sonlu olduğundan G_n'e ulaşınca V'nin G alt vektör uzayı ile tamamlanmış bir bazı elde edilir.

2.1.13 Teorem [5, sayfa 413]

U ve V, k cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı olsun. $f : V \to W$ lineer dönüşümü için $boy(Imf) + boy(\c{c}ekf) = boy(V)$ dir.

İspat: $boy(V) = n$ ve $boy(\c{c}ekf) = s$ ve $Span(\c{c}ekf) = \{a_1, \ldots, a_s\}$ olsun. 2.1.12 teoreminden dolayı V'nin bir bazını $Span(V) = \{a_1, \ldots, a_s, \ldots, a_n\}$ olarak seçebiliriz. Eğer $\{f(a_{s+1}), \ldots, f(a_n)\}$ kümesinin Imf'nin bir bazı olduğunu gösterirsek $boy(Imf) = boy(V) - boy(\c{c}ekf)$ ifadesini göstermiş oluruz. Herhangi bir $v \in V$ için $v = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$ her $c_i \in k$ için doğru olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
f(v) &= \sum_{i=1}^{n} c_i f(a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{s} c_i f(a_i) + \sum_{i=s+1}^{n} c_i f(a_i) \\
&= 0 + \sum_{i=s+1}^{n} c_i f(a_i)
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla $f(v) = \sum_{i=s+1}^{n} c_i f(a_i)$ ve $Span(Imf) = \{f(a_{s+1}), \ldots, f(a_n)\}$ olur. $\square$

2.1.14 Önerme [5, sayfa 413]

V ve W sonlu boyutlu vektör uzayları olmak üzere $f : V \to W$ dönüşümünün bire bir olması için gerek ve yeter koşul $\c{c}ekf = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = 0$ olmasıdır.

İspat: f dönüşümü bire bir olsun. Bu durumda $v, w \in V$ ve $f(v) = f(w)$ olması için gerek ve yeter koşul $v = w$ olmasıdır. $a \in \c{c}ek(f)$ alalım, bu durumda $f(a) = 0$ olur. $f(a) = 0 = f(0)$ dır. f, bire bir olduğundan $a = 0$ bulunur. Yani her $a \in \c{c}ek(f)$ için $f(a) = 0$ olur.

$\c{c}ek(f) = 0$ olsun. $f(0) = 0$ dır. Her $a, b \in V$ için $f(a) = f(b)$ ise $f(a) - f(b) = 0$ olur. f dönüşümü k-lineer olduğundan $f(a - b) = 0$ olur. Bu durumda $a - b = 0$ ve $a = b$ bulunur. f, bire birdir.

2.1.15 Önerme [7, 8.2.1]

V ve W, k üzerine iki vektör uzayı olsun. $V = Span(A)$ ve $W = Span(B)$ bu vektör uzaylarının bazları olsun. $|A| = |B|$ ise öyle bir $\alpha : V \longrightarrow W$ vardır ki bire bir ve üzerinedir.

İspat: Bu durumda $f : V \to W$ sonlu boyutlu bir lineer homomorfizma tanımlayalım. 2.1.11 notunu kullanarak, her $a \in A$ için $f(a) = \alpha(a) \in B \subseteq W$ şeklinde tanımlamamız yeterlidir. $\c{c}ek(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ dır. Bu durumda $v \in \c{c}ek(f)$ için

$$
\begin{aligned}
f(v) &= f\Big(\sum_{a \in A} \lambda_a a\Big) \\
&= \sum_{a \in A} \lambda_a f(a) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olmalıdır. Ancak $f(a) \in B$ ve B, W'nin bir bazı olduğu için $f(a) \neq 0$ dolayısıyla $\lambda_a = 0$ olur. Demek ki $\c{c}ek(f) = 0$ dır, yani bire birdir. $|A| = |B|$ ve bire bir olduğu için örtendir.

2.1.16 Tanım [5, sayfa 421]

V ve W, k üzerine iki vektör uzayı olsun. $V = Span(A)$ ve $W = Span(B)$ bu vektör uzaylarının bazları olsun. $V \otimes_k W$ tensör çarpımı ile oluşan yeni vektör uzayı, bazı k-üzerine $A \times B$ olan vektör uzayıdır. Yani her $x \in V \otimes_k W$ için öyle $a \in A$, $b \in B$ ve $\lambda_{a,b} \in k$ bulabiliriz ki

$$x = \sum_{(a,b) \in A \times B} \lambda_{a,b}(a,b)$$

olur. Bu durumda eğer $boy(V) = n < \infty$ ve $boy(W) = m < \infty$ ise $boy(V \otimes_k W) = nm$ olur. Bu tezde notasyonu basitleştirebilmek için $\otimes_k$ yerine $\otimes$ kullanacağız.

2.1.17 Özellik

V bir k vektör uzayı olmak üzere,

1. $0 \otimes V = 0$
2. $k \otimes V \cong V \cong V \otimes k$

olur.

2.1.18 Örnek

$\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ iki ve üç boyutlu vektör uzayları ve $\mathbb{R}^2 = span\{e_1, e_2\}$, $\mathbb{R}^3 = span\{f_1, f_2, f_3\}$ olsun. Bu durumda

$$\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^3 = span\{e_1, e_2, f_1, f_2, f_3\}$$

ve

$$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3 = span\{(e_1, f), (e_1, f_2), (e_1, f_3), (e_2, f_1), (e_2, f_2), (e_2, f_3)\}$$

olur. Böylece $boy(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^3) = 5$ ve $boy(\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3) = 6$ olur.

2.1.19 Tanım [7, 8.3]

k cismi üzerinde iki vektör uzayı V ve W ise V'den W'ye olan bütün lineer dönüşümlerin kümesi $Hom(V,W)_k$ ile gösterilir. Bu kümede toplama ve skalerle çarpma adı verilen iki işlem aşağıdaki gibi tanımlanır.

Toplama: $f,\, g \in Hom(V,W)_k$ için $(f+g)$ dönüşümü $(f+g)(v) = f(v)+g(v)$ her $v \in V$ için sağlanır.

Skalerle Çarpma: $f \in Hom(V,W)_k$ ve $c \in k$ için cf dönüşümü $(cf)(v) = c(f(v))$ her $v \in V$ için sağlanır.

2.1.20 Önerme [5, sayfa 421]

V, W, V', W', k-vektör uzayları olsun. A, V'nin ve B, W'nin bir bazı olmak üzere $f : V \to V'$ ve $g : W \to W'$ lineer dönüşümler olsun. Bu durumda $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ lineer dönüşümü vardır ve her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $(f \otimes g)(a,b) = f(a) \otimes g(b)$ olur.

2.1.21 Sonuç [5, sayfa 421]

V ve W, k-vektör uzayları olsun. A, V'nin ve B, W'nin bir bazı olmak üzere her $v \in V$ için öyle bir $\lambda_a \in k$ vardır ki $v = \sum_{a \in A} \lambda_a a$ ve her $w \in W$ için öyle bir $\beta_b \in k$ vardır ki $w = \sum_{b \in B} \beta_b b$ olur. Bu durumda $v \otimes w \in V \otimes W$ için $v \otimes w = \sum \lambda_a \beta_b (a \otimes b)$ olur.

2.1.22 Örnek

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümler olsunlar. $\mathbb{R}^2 = span\{e_1, e_2\}$ ve $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_1$, $g(e_1) = e_1 + e_2$, $g(e_2) = e_1 - e_2$ olsun. $f \otimes g : \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü 2.1.20 önermesi gereği $(f \otimes g)(a,b) = f(a) \otimes g(b)$ eşitliği her $a \in A$ ve her $b \in B$ için doğrudur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(f \otimes g)(e_1 \otimes e_1) &= f(e_1) \otimes g(e_1) \\
&= e_2 \otimes (e_1 + e_2) \\
&= e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \\
&= (e_2, e_1) + (e_2, e_2)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
(f \otimes g)(e_1 \otimes e_2) &= e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2 \\
&= (e_2, e_1) - (e_2, e_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f \otimes g)(e_2 \otimes e_1) &= e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \\
&= (e_1, e_2) + (e_1, e_2)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
(f \otimes g)(e_2 \otimes e_2) &= e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 \\
&= (e_1, e_1) - (e_1, e_2)
\end{aligned}
$$

olur.

2.1.23 Önerme [5, sayfa 421]

V, V', W, W', k-vektör uzayları olsun. Eğer $f : V \to V'$ ve $g : W \to W'$ k-lineer dönüşümleri varsa $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ lineer dönüşümünde

$$
çek(f \otimes g) = çek(f) \otimes W + V \otimes çek(g)
$$

eşitliği vardır.

İspat: $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ lineer dönüşümünde

$$
çek(f) \otimes W + V \otimes çek(g) \subseteq çek(f \otimes g)
$$

olduğunu gösterelim. $v \in çek(f)$ ve $w \in W$ için

$$
\begin{aligned}
(f \otimes g)(v \otimes w) &= f(v) \otimes g(w) \\
&= 0 \otimes g(w) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda $çek(f) \otimes W \subseteq çek(f \otimes g)$ dir.

Benzer şekilde $w \in çek(g)$ ve $v \in V$ için

$$
\begin{aligned}
(f \otimes g)(v \otimes w) &= f(v) \otimes g(w) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ve $V \otimes çek(g) \subseteq çek(f \otimes g)$ olur. Bu iki ifadeden

$$
çek(f) \otimes W + V \otimes çek(g) \subseteq çek(f \otimes g)
$$

olacaktır.

Şimdi de $f \otimes f : V \otimes W \to V' \otimes W'$ lineer dönüşümünde

$$
çek(f \otimes g) \subseteq çek(f) \otimes W + V \otimes çek(g)
$$

olduğunu gösterelim. Biliyoruz ki

$$f \otimes g = (f \otimes id) \circ (id \otimes g)$$

olur. Bu durumda $f \otimes id : V \otimes W \to V' \otimes W$ lineer transformasyonu için

$$çek(f \otimes id) = çek(f) \otimes W$$

olduğunu gösterelim. Varsayalım ki

$$span(W) = \{w_1, w_2, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_m\}$$

için $span\left\{çek\left(g\right)\right\} = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ ve

$$span(V) = \{u_1, u_2, \ldots, u_l, u_{l+1}, \ldots, u_n\}$$

için $span\left\{çek(f)\right\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$ olsun. $v \in çek(f \otimes id)$ için öyle bir $\lambda_{ij} \in k$ vardır ki

$$v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} \left(u_i \otimes w_j\right) \in çek\left(f \otimes id\right)$$

olur. Elimizde ki w_i'ler baz vektörü olduğu için

$$\begin{aligned}
(f \otimes id)(v) &= (f \otimes id)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}\left(u_i \otimes w_j\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}\left(f(u_i) \otimes w_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \lambda_{ij}\left(f(u_i) \otimes w_j\right) + \sum_{i=l+1}^{n} \lambda_{ij}\left(f(u_i) \otimes w_j\right) \\
&= \sum_{i=l+1}^{n} \lambda_{ij}\left(f(u_i) \otimes w_j\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olmalıdır. Her j için w_j, W'nin bir bazı olduğu için w_j değerleri sıfır olamaz. Dolayısıyla

$$\sum_{i=l+1}^{n} \lambda_{ij} f(u_i) = 0$$

ve

$$\sum_{i=l+1}^{n} \lambda_{ij} f(u_i) \in çek(f)$$

olur ve $i \gneqq l+1$ için $\lambda_{ij} = 0$ olacaktır. $çek(f \otimes id) \subseteq çek(f) \otimes W$'dir.

$v \in çek(f)$ ve $w \in W$ için

$$\begin{aligned}(f \otimes id)(v \otimes w) &= f(v) \otimes w \\ &= 0 \otimes w \\ &= 0\end{aligned}$$

$çek(f \otimes id) \supseteq çek(f) \otimes W$'dir. Bu durumda $çek(f \otimes id) = çek(f) \otimes W$ olur.

Şimdi varsayalım ki

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} \left(u_i \otimes w_j\right) \in çek\,(f \otimes g)$$

olsun. Bu durumda

$$(f \otimes g)(\alpha) = (f \otimes id) \circ (id \otimes g)(\alpha) = 0$$

olur. Yani

$$(id \circ g)(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} \left(u_i \otimes g(w_j)\right) \in çek\,(f \otimes id)$$

olur. Ancak $çek(f \otimes id) = çek(f) \otimes W$' olur. Benzer şekilde $çek(id \otimes g) = V' \otimes çek(g)$ bulunur. $A = span\{w_r w_{r+1}, \ldots, w_m\}$, $B = span\{u_l, u_{l+1}, \ldots, u_n\}$ olsun. O zaman

$$V \otimes W = çek(f) \otimes çek(g) \oplus A \otimes çek(g) \oplus çek(f) \otimes B \oplus A \otimes B$$

bulunur. $f \otimes g$ fonksiyonunu

$$f \otimes g = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

olacak şekilde dört lineer dönüşümün toplamı olarak parçalayalım. Böylece

$$\begin{aligned}
f \otimes g &: V \otimes W \longrightarrow V' \otimes W' \\
u_1 &: \text{çek}(f) \otimes \text{çek}(g) \longrightarrow V' \otimes W' \\
u_2 &: A \otimes \text{çek}(g) \longrightarrow V' \otimes W' \\
u_3 &: \text{çek}(f) \otimes B \longrightarrow V' \otimes W' \\
u_4 &: A \otimes B \longrightarrow V' \otimes W'
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, $\alpha \in \text{çek}\,(f \otimes g)$ ise $u_1(\alpha) = u_2(\alpha) = u_3(\alpha) = 0$ olur ve $u_4(\alpha) = 0$ olmalıdır.

$$u_4(\alpha) = \sum_{i=l+1}^{n} \sum_{j=r+1}^{m} \lambda_{ij} u_4\left(u_i \otimes w_j\right)$$

için $\lambda_{ij} = 0$ olur.

$$\text{çek}(V \otimes W \overset{f \otimes g}{\rightarrow} V' \otimes W') = \text{çek}(f) \otimes W + V \otimes \text{çek}(g) \subseteq V \otimes W$$

bulunur. $\square$

2.1.24 Önerme

Eğer $f : V \to V'$, k-lineer transformasyonu ise

$$\text{çek}(V \otimes V \overset{f \otimes f}{\rightarrow} V' \otimes V') = \text{çek}(f) \otimes V + V \otimes \text{çek}(f) \subseteq V \otimes V$$

olur.

İspat: İspatı 2.1.23 önermesinden kolaylıkla görülebilir. $\square$

2.1.25 Tanım ve Notasyon [5, sayfa 431]

V, k cismi üzerine bir vektör uzayı olsun. $Hom_k\,(V,k)$ vektör uzayına V vektörünün duali denir ve $V^{\vee}$ ile gösterilir. Yani $V^{\vee} = Hom_k\,(V,k)$ olur.

2.1.26 Teorem [5, sayfa 432]

V k-uzay olmak üzere $V^{\vee} = Hom_k(V,k) \cong V$'dir.

İspat: $f \in Hom_k(V,k)$ ve $V = span(A)$ olsun. $f : V \to k$ lineer dönüşümünde her $v \in V$ ve her $a \in A$ için öyle bir $\lambda_a \in k$ vardır ki

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\sum \lambda_a a) \\ &= \sum_{a \in A} \lambda_a f(a) \end{aligned}$$

olur. $\delta_a \in Hom_k(V,k)$ olmak üzere δ_a fonksiyonu

$$\delta_a(a') = \begin{cases} 1 & , a = a' \\ 0 & , a \neq a' \end{cases}$$

olsun. Acaba $f = \sum_{a \in A} f(a)\delta_a$'ya eşit oluyor mu?

$$\begin{aligned} f(\sum_{a \in A} \lambda_a a) &= \sum_{a \in A} \lambda_a f(a) \\ &= \sum_{a \in A} \lambda_a (\sum_{a' \in A} f\left(a'\right) \delta_{a'})(a) \\ &= \sum_{a,a'} \lambda_a f(a') \delta_a(a') \\ &= \sum_{a \in A} \lambda_a f(a) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$f = \sum_{a \in A} f(a)\, \delta_a$$

yazılabilir. $Hom_k(V,k) = span\{\delta_a \mid a \in A\}$ olacak şekilde f fonksiyonunun bir bazını bularak, $Hom_k(V,k)$'yı bir vektör uzayı olarak ifade ettik.

$\Phi : V \to Hom_k(V,k)$ homomorfizmasını tanımlayalım ve bu homomorfizmanın bire bir ve örten olduğunu ispatlayalım. $\Phi : V \to Hom_k(V,k)$ homomorfizmasında $\Phi(a) = \delta_a$ olsun. Eğer $\Phi(v) = 0$ ise o zaman

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= \Phi(\sum_{a \in A} \lambda_a a) \\ &= \sum_{a \in A} \lambda_a \Phi(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. $\Phi(a) = \delta_a$, $Hom_k(V,k)$'nın bir bazı olduğu için her $a \in A$ için $\Phi(a) = \delta_a \neq 0$'dır, bu durumda $\lambda_a = 0$ olur ve $\c{c}ek\,(\Phi) = 0$ dır. 2.1.13 teoreminden dolayı homomorfizma $1-$ 1'dir. $boy\,(V) = boy\,(Hom_k(V,k))$ olduğu için 2.1.15 önermesinden dolayı homomorfizma izomorftur. Böylece $V^\vee = Hom_k(V,k) \cong V$ olur. $\square$

2.1.27 Önerme [5, sayfa 433]

V vektör uzayı olmak üzere $(V^\vee)^\vee \cong V$ dir.

İspat: $Span\,(A) = V$ ve $a \in A$ için 2.1.26 önermesinden dolayı

$$(V^\vee)^\vee = Hom_k(Hom_k(V,k),k) \cong Hom_k(V,k) \cong V$$

olur. $\square$

2.1.28 Önerme

V ve W, k üzerine sonlu boyutlu vektör uzayları olmak üzere

$f : V \to W$ lineer dönüşümü için $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ lineer dönüşümü vardır.

İspat: Tanım gereği $f^\vee : Hom_k(W,k) \to Hom_k(V,k)$ olarak yazılır. $\alpha \in Hom_k(W,k)$ ise $\alpha : W \to k$ olur. Bu durumda

$$\begin{tikzcd} & k & \\ W \arrow[ur, "\alpha"] & & V \arrow[ll, "f"'] \arrow[ul, "?"'] \end{tikzcd}$$

ve $f^\vee(\alpha) = \alpha \circ f \in Hom_k(V,k)$ olarak tanımlayalım. O zaman her $\alpha, \beta \in Hom_k(W,k)$ için

$$\begin{aligned} f^\vee(\alpha+\beta) &= (\alpha+\beta)\circ f \\ &= \alpha\circ f + \beta\circ f \\ &= f^\vee(\alpha) + f^\vee(\beta) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f^\vee(\lambda\alpha) &= (\lambda\alpha)\circ f \\ &= \lambda(\alpha\circ f) \\ &= \lambda f^\vee(\alpha) \end{aligned}$$

olur. $f^\vee(\alpha) = \alpha \circ f$ lineer dönüşümdür. $\square$

2.1.29 Teorem

V ve W, k üzerine sonlu boyutlu vektör uzayları olsun.

$f : V \to W$ lineer dönüşümü bire bir ise $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ lineer dönüşümü örtendir.

İspat: A, V'nin bir bazı ve f lineer transformasyonu bire bir ise $|f(A)| = |A|$ olur. C, W'nin bir bazı olmak üzere $C = f(A) \sqcup C'$ yazabiliriz. $f^\vee : Hom(W,k) \to Hom(V,k)$ lineer transformasyonunda $\alpha \in Hom(W,k)$ için 1.1.28 önermesine göre $f^\vee(\alpha) = \alpha \circ f$ ve

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{c \in C} \lambda_c \delta_c \\ &= \sum_{c \in C'} \lambda_c \delta_c + \sum_{c \in f(A)} \lambda_c \delta_c \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} f^\vee(\alpha) &= \sum_{c \in C} \lambda_c f^\vee(\delta_c) \\ &= \sum_{c \in C'} \lambda_c f^\vee(\delta_c) + \sum_{c \in f(A)} \lambda_c f^\vee(\delta_c) \\ &= 0 + \sum_{c \in f(A)} \lambda_c f^\vee(\delta_c) \\ &= \sum_{c \in f(A)} \lambda_c f^\vee(\delta_c) \end{aligned}$$

olur. $f^\vee(\delta_{f(a)}) = \delta_a$ ise $f^\vee$ örten bir lineer transformasyon olacaktır. Öyleyse $f^\vee(\delta_{f(a)}) = \delta_a$ eşitliğinin doğruluğunu kanıtlamalıyız. $f^\vee(\delta_{f(a)}) = \delta_a \circ f$'dir. Bu durumda

$$f^\vee(\delta_{f(a)})(a') = \delta_a \circ f(a') = \begin{cases} 1 & , a = a' \\ 0 & , a \neq a' \end{cases}$$

olarak alırsak, $f^\vee(\delta_{f(a)})(a') = \delta_a$ olur. Her $v \in V$ için

$$f^\vee(\delta_{f(a)})(v) = \delta_a \circ f(v) = \begin{cases} 1 & , f(v) = f(a) \\ 0 & , f(v) \neq f(a) \end{cases}$$

olur. $f^\vee(\delta_{f(a)}) = \delta_a$ eşitliği doğrudur. $\square$

2.1.30 Teorem

V ve W, k üzerine sonlu boyutlu vektör uzayları olsun.

$f: V \to W$ lineer dönüşümü örten ise $f^{\vee}: W^{\vee} \to V^{\vee}$ lineer dönüşümü bire birdir.

İspat: 2.1.14 Önermesine göre $\c{c}ek(f^{\vee}) = \{x: f^{\vee}(x) = 0\} = 0$ ise bire birdir. Öyleyse $f^{\vee}(x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in W^{\vee}$ vardır. B, W'nin bir bazı ve $\lambda_b \in k$ olmak üzere $x = \sum_{b \in B} \lambda_b \delta_b$ olur.

$$\begin{aligned} f^{\vee}(x) &= \sum_{b \in B} \lambda_b f^{\vee}(\delta_b) \\ &= \sum_{b \in B} \lambda_b (\delta_b \circ f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Her $v \in V$ için $f^{\vee}(x)(v) = 0$ olur. Son iki eşitlikten

$$\begin{aligned} f^{\vee}(x)(v) &= \sum_{b \in B} \lambda_b f^{\vee}(\delta_b)(v) \\ &= \sum_{b \in B} \lambda_b (\delta_b \circ f(v)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. f lineer transformasyonu örten olduğu için bir $b_0 \in B$ için öyle bir $v_0 \in V$ vardır ki $f(v_0) = b_0$ olur.

$$\begin{aligned} f^{\vee}(x)(v_0) &= \sum_{b \in B} \lambda_b f^{\vee}(\delta_b)(v_0) \\ &= \sum_{b \in B} \lambda_b \delta_b(b_0) \\ &= \lambda_b \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. f örten olduğu için her $b \in B$ için $\lambda_b = 0$ olur. Bu durumda her $x \in \c{c}ek(f^{\vee})$ için $x = 0$ olur. $f^{\vee}$ bire birdir. $\square$

2.1.31 Önerme

V ve W, k üzerine sonlu boyutlu vektör uzayları olsun. $f: V \to V^{\vee}$ izomorfizması varsa $f \otimes id: V \otimes W \to V^{\vee} \otimes W$ izomorfizması vardır.

İspat: $V = Span(A)$ ve $W = Span(B)$ olsun. Her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $f \otimes id: V \otimes W \to V^{\vee} \otimes W$ homomorfizması 2.1.26 teoremi ve 2.1.20 önermesi gereği $(f \otimes id)(a, b) = f(a) \otimes id(b) = f(a) \otimes b \in V^{\vee} \otimes W$ olur.

2.1.32 Teorem

V ve W, k üzerine sonlu boyutlu vektör uzayları olsun.

$$Hom_k(V,W) \cong Hom_k(V,k) \otimes W \cong V \otimes W$$

İspat: $V \otimes W \cong Hom_k(V,W)$ ve olduğunu gösterelim. $V = Span(A)$ ve $W = Span(B)$ olsun. $b\delta_a : A \to B$ şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Öyleki

$$(b\delta_a)(x) = \begin{cases} b & , a = x \\ 0 & , a \neq x \end{cases}$$

olsun. Bunun $Hom_k(V,W)$'nin bir bazı olduğunu gösterelim. $f : V \to W$ şeklinde bir lineer dönüşüm olsun. O zaman her $v \in V$ için bir $\lambda_a \in k$ vardır öyle ki

$$v = \sum_{a \in A} \lambda_a a$$

ve

$$f(v) = \sum_{a \in A} \lambda_a f(a)$$

olur. Ancak B, W'nin bir bazı olduğu için her $f(a) \in B$ için öyle bir $\mu_{a,b} \in k$ vardır ki

$$f(a) = \sum_{b \in B} \mu_{a,b} b$$

olur. Bu durumda

$$f(v) = \sum_{a,b \in A \times B} \lambda_a \mu_{a,b} b$$

olur. Ancak

$$g = \sum_{a,b \in A \times B} \mu_{a,b} (b\delta_a) \in Hom(V,W)$$

olur. Çünkü

$$\begin{aligned} g(v) &= \sum_{a,b \in A\times B} \mu_{a,b}\,(b\delta_a)\,(v) \\ &= \sum_{a'\in A} \sum_{a,b\in A\times B} \lambda_a \mu_{a,b}\,(b\delta_a)\left(a'\right) \\ &= \sum_{a,b\in A\times B} \lambda_a \mu_{a,b} b \\ &= f(v) \end{aligned}$$

dir. $span(Hom_k(V,W)) = \{b\delta_a \mid b \in B,\, a \in A\, ve\, \delta_a \in k\}$ olur. Yani $\Phi : V \otimes W \longrightarrow Hom(V,W)$ homomorfizması $\Phi(a,b) = b\delta_a$ işlemi ile bire birdir. Aksi durumda her $a' \in A$ için $b\delta_a = 0$ ise $b\delta_a(a') = 0$ olur. $b\delta_a(a) = 0$ demektir, buradan $b = 0$ bulunur. b sıfır olamaz çünkü $b \in B$, W'nin bir bazıdır. Çelişki doğar. Öyleyse $\Phi(a,b) = b\delta_a$ bire birdir.

$boy\,(V \otimes W) \geq boy(Hom_k(V \otimes W)$ ve Φ homomorfizması bire bir olduğu için izomorfizmadır.

2.1.31 Önermesinden dolayı $Hom_k(V,W) \cong Hom_k(V,k) \otimes W$ olacaktır. Böylece

$$Hom_k(V,W) \cong Hom_k(V,k) \otimes W \cong V \otimes W$$

olur. □

2.1.33 Teorem

V ve W, k üzerine sonlu boyutlu vektör uzayları olsun. $Hom_k(V,W)$ kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemine göre k üzerine bir vektör uzayıdır. Ayrıca $boy\,(V) = m$ ve $boy\,(W) = n$ ise $boy\,(Hom_k(V,W)) = mn$ olur.

2.1.34 Özellik

V ve W, k üzerine sonlu boyutlu bir vektör uzayları olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $(V \oplus W)^{\vee} = V^{\vee} \oplus W^{\vee}$
2. $(V \otimes W)^{\vee} = V^{\vee} \otimes W^{\vee}$

2.1.35 Sonuç

2.1.29 ve 2.1.30 teoremleri ve 2.1.34 özelliğinin bir sonucu olarak sonlu vektör uzayları için

1. $V \cong W$ ise $V^{\vee} \cong W^{\vee}$ dir.

2. $V \subseteq W$ ise $V^{\vee} \subseteq W^{\vee}$ dir.

2.1.36 Önerme

V, W, V', W' sonlu boyutlu k-vektör uzayları ve $f : V \to V'$ ve $g : W \to W'$ lineer dönüşümler olsun. Bu durumda her $h \in Hom_k(V',W)$ için $f' : Hom_k(V',W) \to Hom_k(V,W)$ lineer dönüşümü vardır öyle ki $f'(h) = h \circ f$ olur. Benzer şekilde her $u \in Hom_k(V,W)$ için $g' : Hom_k(V,W) \to Hom_k(V,W')$ lineer dönüşümü vardır öyleki $g'(u) = g \circ u$ olur.

İspat: $f' : Hom_k(V',W) \to Hom_k(V,W)$ lineer dönüşümünü ele alalım, bu durumda her $h \in Hom_k(V',W)$ için aşağıdaki diyagram mevcuttur.

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ f\downarrow & \overset{h}{\nearrow} & \downarrow g \\ V' & & W' \end{array}$$

ve $f'(h) = f \circ h$ olur. Her $h, h' \in Hom_k(V',W)$ ve her $\lambda \in k$ için

$$\begin{aligned} f'(h+h') &= (h+h') \circ f \\ &= h \circ f + h' \circ f \\ &= f'(h) + f'(h') \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f'(\lambda h) = (\lambda h) \circ f &= \lambda f'(h) \\ &= \lambda (h \circ f) \\ &= \lambda f'(h) \end{aligned}$$

olur. Ve benzer şekilde $g'(u) = g \circ u$ oluğu görülür. $\square$

2.1.37 Önerme

k cisim, V vektör uzayı olmak üzere $Hom_k(k,V) \cong V$ dir.

İspat: $f \in Hom_k(k,V)$ alalım. k bir cisim olduğu için tek boyutlu vektör uzayıdır ve bazı 1 dir. Öyleyse her $\lambda \in k$ için $f(\lambda) \in V$ ve $f(\lambda \cdot 1) = \lambda f(1)$ olur. $\alpha : Hom_k(k,V) \to V$ izomarfizma olduğunu ispatlamak için $1-1$ ve örtenliğine bakalım. Her $v \in V$ için öyle bir $f_v \in Hom_k(k,V)$ vardır ki $f_v(\lambda) = \lambda v$ ve $\alpha(f_v) = v$ olur. Örtendir.

$\alpha(f) = \alpha(g)$ ise $f(1) = g(1)$ ve $\lambda f(1) = \lambda g(1)$ ve $f(\lambda) = g(\lambda)$ olur. $f = g$ dir. α bire birdir.

$\alpha(\lambda f+\mu g)=(\lambda f+\mu g)(1)=\lambda f(1)+\mu g(1)=\lambda\alpha(f)+\mu\alpha(g)$ olur. $\square$

2.1.38 Sonuç

$Hom_k(k,V)\cong V$ bütün vektör uzayları için V'nin her elemanı $k\to V$ giden bir lineer dönüşüme denktir.

2.1.39 Teorem [2, sayfa 28]

V, W ve U , k üzerine sonlu boyutlu vektör uzayları olsun.Bu durumda

$$Hom_k(V\otimes W,U)\cong Hom_k(V,Hom_k(W,U))$$

olur.

İspat:

$$\alpha: Hom_k(V\otimes W,U)\longrightarrow Hom_k(V,Hom_k(W,U))$$

olsun. Bu durumda $f\in Hom_k(V\otimes W,U)$ alalım. Bu durumda öncelikle her $v\in V$ ve her $w\in W$ için $f(v\otimes w)=u$ olacak şekilde $u\in U$ vardır.

$\alpha(f):V\longrightarrow Hom_k(W,U)$ ve $v\in V$ için $\alpha(f)(v):W\longrightarrow U$ ve $w\in W$ için $\alpha(f)(v)(w)=f(v\otimes w)$ olur. İfade bire birdir.

Örtenliğinin ispatı için tersinin varlığını gösterelim.

$$\beta: Hom_k(V,Hom_k(W,U))\longrightarrow Hom_k(V\otimes W,U)$$

olsun. $h\in Hom_k(V,Hom_k(W,U))$ alalım. Bu durumda öncelikle $h(v)(w)=u$ olacaktır.

$h\longmapsto\beta(h)$ için $\beta(h):V\otimes W\longrightarrow U$ olur. $v\otimes w\in V\otimes W$ için $\beta(h)(v\otimes w)=h(v)(w)$ olur.

Eğer $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha=id$ olduğunu gösterebilirsek α ve β'nın birbirlerinin tersi olduğunu göstermiş oluruz. Böylece örten olduğu gösterilmiş olur.

1. $\alpha\circ\beta=id$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\alpha\circ\beta(h)(v\otimes w)&=\alpha(h(v)(w))\\&=h(v\otimes w)\end{aligned}$$

2. $\beta\circ\alpha=id$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\beta\circ\alpha(f)(v)(w)&=\beta(f(v\otimes w))\\&=f(v)(w)\end{aligned}$$

$Hom_k(V \otimes W, U) \cong Hom_k(V, Hom_k(W, U))$ izomorfizması vardır. $\square$

2.1.40 Tanım [11, sayfa 649]

U, k üzerinde tanımlanmış bir vekör uzayı olsun. U üzerinde $\mu : U \otimes_k U \to U$ şeklinde bir çarpma operasyonu tanımlanır. Bu operasyonu tanımlamak için baz elemanlarının çarpımını tanımlamak yeterlidir ve 2.1.11 notundan kolayca görülür. μ çarpma operasyonu birleşme ve birim eleman özelliklerini sağlıyorsa U kümesine k cismi üzerinde bir cebirdir denir. Yani

$\mu : U \otimes_k U \to U$ operasyonunda $a, b \in U$ için $\mu(a,b) = ab$ olur ve

1. Birleşme Özelliği: Her $a, b, c \in U$ için

$$\begin{array}{ccc} U \otimes U \otimes U & \xrightarrow{id \otimes \mu} & U \otimes U \\ {\scriptstyle \mu \otimes id} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mu} \\ U \otimes U & \xrightarrow[\mu]{} & U \end{array}$$

ifadesini elemanlar bazında ele alırsak

$$\begin{array}{ccc} a \otimes b \otimes c & \xrightarrow{id \otimes \mu} & a \otimes bc \\ {\scriptstyle \mu \otimes id} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mu} \\ ab \otimes c & \xrightarrow[\mu]{} & abc \end{array}$$

olur.

2. Birim Elemen Özelliği: Her $a \in U$ için

$$\begin{array}{ccccccc} U \otimes U & \xleftarrow{1 \otimes id} & U & \xrightarrow{\dot{I}d \otimes 1} & U \otimes U \\ {\scriptstyle \mu} \downarrow & \nearrow & & \nwarrow & \downarrow {\scriptstyle \mu} \\ U & & & & U \end{array}$$

ifadesini elemanlar bazında ele alırsak

$$\begin{array}{ccccc} 1 \otimes a & \xleftarrow{1 \otimes id} & a & \xrightarrow{\dot{I}d \otimes 1} & a \otimes 1 \\ {\scriptstyle \mu} \downarrow & \nearrow & & \nwarrow & \downarrow {\scriptstyle \mu} \\ 1a & & & & a1 \end{array}$$

olur.

2.1.41 Örnekler

1. $U = k[x]$ ve $Span(U) = k\{1,x,x^2,\dots\}$ olmak üzere $\mu : U \otimes U \to U$ çarpma operasyonu $\mu(x^n, x^m) = x^{n+m}$ olarak tanımlanır.

2. $k = \mathbb{Z}/3$ ve $f = 1+x+x^2$ olmak üzere $U = k[x]/f = k\{1,x\}$ olduğu için $U \otimes U$, dört boyutlu bir uzay olur ve $Span(U) = k\{(1,1),(1,x),(x,1),(x,x)\}$ dir. Ve çarpma operasyonu $\mu : U \otimes U \to U$ için $\mu(1,1) = 1$, $\mu(1,x) = x$, $\mu(x,1) = x$ ve $\mu(x,x) = -1-x$ şeklinde tanımlanır.

3. Eğer $U = k[x]/(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)$ ve $Span(U) = \{1,x,\dots,x^{n-1}\}$ ise $\mu : U \otimes_k U \to U$ tensör çarpımı fonksiyonu

$$\mu\left(x^i, x^j\right) = \begin{cases} x^{i+j} & , i+j<n \\ x^{i+j-n}\left(-1/a_n\right)\left(a_0+\dots+a_{n-1}x^{n-1}\right) & , i+j>n \end{cases}$$

olur. Çünkü

$$x^{i+j} = x^{i+j-n}\left(-1/a_n\right)\left(a_0+\dots+a_{n-1}x^{n-1}\right)$$

olur. Bu işlem x^m'lerin tamamının kuvveti n den küçük oluncaya kadar tekrarlanır.

4. $A = k\{[x]/x^2\}$ vektör uzayının bazları $\{1,x\}$ olmak üzere $A \otimes A$ için oluşan bazlar $\{(1,1),(1,x),(x,1),(x,x)\}$ olur ve $\mu : A \otimes A \to A$ fonksiyonu için $\mu(1,1) = 1$, $\mu(1,x) = x$, $\mu(x,1) = x$ ve $\mu(x,x) = 0$ dır.

2.1.42 Teorem

A cebir ve k cisim olsun. $Hom_k(V \otimes V, k) \cong Hom_k(V,k) \otimes Hom_k(V,k)$ dır.

İspat: 2.1.26 önermesinden dolayı $Hom_k(V,k) \cong V$ olduğu için

$$Hom_k(V \otimes V, k) \cong V \otimes V \cong Hom_k(V,k) \otimes Hom_k(V,k)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\square$

2.2 HALKALAR VE MODÜLLER

Bu alt bölümde değişmeli halkalar ve modüllerle ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Aksi belirtilmedikçe tez boyunca tüm halka ve modüller değişmeli olarak ele alınmıştır. Aşağıdaki ispatlar hem cebirler hem de halkalar için geçerlidir. Ancak biz bu tezde ağırlıkla cebirler ve cebirler üzerindeki modüllerle çalışacağız. Bölüm boyunca bazı teorem ve tanımlar halkalarda bazıları ise cebirsel yapılarda verilmiştir. Ancak halka, cebire göre daha genel bir yapı olduğu için sonuçların tamamı cebirler için de geçerlidir.

2.2.1 Tanım [11, 8.1]

R bir değişmeli halka ve $(M,+)$ değişmeli bir grup olmak üzere R'nin elemanları ve M'nin elemanları arasında

$$f : R\times M \to M; \text{ her } r\in R \text{ ve her } m\in M$$

için

$$f(r,m) = rm$$

olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa M değişmeli grubuna R üzerinde bir modül veya kısaca M bir R-modüldür diyeceğiz. M bir R-modül ise her $r,s\in R$ ve her $m,n\in M$ için aşağıdaki şartları sağlayacaktır.

M1) $rm\in M$

M2) $r(m+n) = rm+rn$

M3) $(r+s)m = rm+sm$

M4) $r(sm) = (rs)m$

2.2.2 Örnek

1. Her R halkasında, skaler çarpmayı halkadaki çarpım alarak, kendisi üzerine bir R-modül inşaa ederiz.

2. R bir halka olmak üzere $R[x]$ polinomlar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemine göre bir R-modüldür.

3. V, k cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V bir k-modüldür.

4. R bir halka ve I, R'nin bir ideali olmak üzere I bir R-modüldür.

5. R bir halka ve I, R'nin bir ideali olmak üzere $R\times R/I \longrightarrow R/I$ fonksiyonunda skaler çarpımı $(r,s+I)\longmapsto rs+I$ ile tanımlarsak R/I bir R-modül olur.

2.2.3 Tanım [11, 8.2]

M bir R-modül olsun. N'nin, M'nin bir alt modülü olabilmesi için N'nin, M'nin bir alt grubu ve R halkasında çarpımsal olarak kapalı olması gerekir.

2.2.4 Tanım [1, 1.1.17]

R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olmak üzere $ab = ba = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına sıfır bölen denir.

2.2.5 Tanım [1, 1.1.19]

Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz bir halkaya tamlık bölgesi denir.

2.2.6 Örnek

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Tamsayılar Halkası, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ Rasyonel Sayılar Halkası ve $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ Kompleks Sayılar Halkası birer tamlık bölgesidir.

2. p asal sayı olmak üzere $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ halkası bir tamlık bölgesidir.

3. $P[x]$ Polinom Halkası olmak üzere ${}^{P[x]}/_{\langle x^2 \rangle}$ bir tamlık bölgesidir.

2.2.7 Önerme [1, 1.1.26]

Her cisim bir tamlık bölgesidir.

İspat: Bir cisim değişmeli ve birimli bir halka olduğundan, tamlık bölgesi olduğunu göstermek için sıfır bölensiz olduğunu göstermek yeterlidir. F bir cisim ve $a, b \in F$ için $ab = 0$ ise ya $a = 0$ yada $b = 0$ olmalıdır. Eğer $a = 0$ ise o zaman idda açıktır. Bu yüzden $a \neq 0$ olduğunu kabul ederek $b = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Cisim tanımından $0 \neq a \in F$'nin $a^{-1} \in F$ tersi vardır. Öyleyse $a^{-1}(ab) = a^{-1}0$ olur. Buradan $\left(a^{-1}a\right) b = 0$ ve $1b = 0$ bulunur. Bölece $b = 0$ olacaktır. Cisim sıfır bölensizdir. $\square$

2.3 İDEALLER, ASAL İDEALLER VE MAKSİMAL İDEALLER

Bu alt bölümde idealler ve basit R halkası öncelikli olarak işlenecek, değişmeli R halkasının nilpotent ve idempotent elemanlarını tanımlayıp ilgili teoremler çözülecektir. Asal ideal ve maksimal ideallerle birlikte modül, maksimal modül ve minimal modüller işlenecektir. Sözü edilen konularla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.3.1 Tanım [11, 3.10]

R değişmeli bir halka olsun. I'nın R halkasının bir ideali olabilmesi için R'de toplama işlemine göre alt grup olmalı ve $RI \subseteq I$ olmalıdır, yani her $r \in R$ ve her $i \in I$ için $ri \in I$ olmalıdır.

2.3.2 Tanım [4, 1.3.10]

R değişmeli bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. I ideali tek eleman tarafından üretiliyorsa yani $a \in R$ için $I = \langle a \rangle$ ise I idealine temel ideal (principal ideal) denir.

2.3.3 Tanım [4, 1.3.12]

Her ideali temel ideal olan halkaya Temel İdeal Halkası denir. Eğer halka tamlık bölgesi ise Temel İdeal Bölgesi denir.

2.3.4 Önerme ve Tanım [4, 6.1.12]

R değişmeli bir halka olsun. I'nın, R halkasının bir ideali olabilmesi için gerek ve yeter koşul I'nın, R'nin alt modülü olmasıdır. Yani I, R halkasının bir ideali ise I bir R-modüldür.

İspat: R halkasında I bir ideal ise $r \in R$ ve $i \in I$ için $ri \in I$ olmalıdır. I'nın , R halkasının bir modülü olması için $f : R \times I \to I$; $r \in R$ ve $m \in I$ için $f(r,m) = rm$ olacak şekilde I ideali ve R halkası arasında tanımlanan fonksiyon f olsun. Bu taktirde, I'nın bir $R-modül$ olabilmesi için, her $r,s \in R$ ve $m,n \in I$ için aşağıdaki şartlar sağlanacaktır.

M1) $rm \in I$

M2) $r(m+n) = rm + rn$

M3) $(r+s)m = rm + sm$

M4) $r(sm) = (rs)m$ □

2.3.5 Sonuç [4, 6.1.3]

R bir R modüldür.

2.3.6 Tanım

M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. $\{m\}$ kümesinin ürettiği alt modül

$$\langle m \rangle = Rm = \{rm : r \in R\}$$

şeklinde tanımlanır ve m ile üretilmiş alt modül denir.

2.3.7 Tanım [7, 7.3.1]

M ve N birer R-modül olsunlar. $M \oplus N$ direk toplamı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$M \oplus N$=$\{(x,y) : x \in M, y \in N\}$ ve $r \in R$ için

1. $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$
2. $r(x_1,y_1) = (rx_1, ry_1)$

olur. Daha genel bir ifadeyle, eğer I bir indeks kümesi ise $\bigoplus_{i \in I} M_i$ alt modül ailesi için $(x_i)_{i \in I}$ üreteçlerinin ailesi olur, öyle ki $x_i \in M_i$ ve $i \in I$ için hemen hemen bütün x_i'ler sıfırdır.

2.3.8 Tanım

I ve J, R halkasının iki ideali olmak üzere $I+J = \{a+b : a \in I \, ve \, b \in J\}$ olarak tanımlanır.

2.3.9 Önerme ve Tanım [11, 3.13]

R bir halka ve I, R'nin bir ideali olmak üzere $R/I = \{a+I : a \in R\}$ kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri sırası ile her $(x+I),(y+I) \in R/I$ için $(x+I)+(y+I) = (x+y)+I$ ve $(x+I)(y+I) = xy+I$ şeklinde tanımlanıyorsa o zaman $(R/I,+,\cdot)$ cebirsel yapısı R'nin I'ya göre bölüm halkasıdır.

2.3.10 Önerme

R halka ve $I,J \subseteq R$ idealleri olsun. $I \cap J = 0$ ise $I \oplus J \cong I+J$ olur.

İspat: Halkalar için olan 2. İzomorfizma teoremine göre $(I+J)/I \cong J/I \cap J$ eşitliği vardır. $I \cap J = 0$ olduğundan $(I+J)/I \cong J$ olur. $f : I \oplus J \to I+J$ homomorfizması tanımlayalım. Bu durumda her $x \in I$ ve her $y \in J$ için $f(x,y) = x-y$ olsun. Bu homomorfizmada $çek(f) = I \cap J = 0$ olur. Böylece $I \oplus J \cong I+J/I \cap J = I+J$ olacaktır.$\square$

2.3.11 Önerme [4, 1.5.1]

R ve S iki halka olsunlar. $\varphi:\ R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. S', S'nin bir ideali ise $\varphi^{-1}(S')$, R'nin bir ideali olur. Ayrıca $M \subseteq S$ maksimal ideali için $\varphi^{-1}(M) \subseteq R$ maksimal ideal olacaktır.

İspat: S', S'nin bir ideali olsun. $\varphi(0_R) = 0_S \in S'$ olduğundan $0 \in \varphi^{-1}(S')$ yazabiliriz. $\varphi^{-1}(S') \neq \emptyset$ olur. Şimdi her $a,b \in \varphi^{-1}(S')$ ve $r \in R$ için $a-b \in \varphi^{-1}(S')$ ve $ra \in \varphi^{-1}(S')$ olduğunu göstermeliyiz. $a,b \in \varphi^{-1}(S')$ ise $\varphi(a), \varphi(b) \in S'$ yazabiliriz. S', S'nin bir ideali ve φ halka homomorfizması olduğundan $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b)$ ve $\varphi(ra) = r\varphi(a)$ yazabiliriz. Buradan $\varphi(a-b) \in S'$ ve $\varphi(ra) \in S'$ olur ki bu da $a-b \in \varphi^{-1}(S')$ ve $ka \in \varphi^{-1}(S')$ olmasını gerektirir. □

2.3.12 Önerme

R halka ve I, R'nin bir ideali olsun. R/I'nın herbir J' ideali için R'de öyle bir J' ideali vardır ki $J \supseteq I$ ve J idealinin R/I daki görüntüsü J' idealidir.

İspat: π: $R \to R/I$ homomorfizmasını ele alalım. Her $J' \subseteq R/I$ ideali için $\pi^{-1}(0) = I \subseteq R$. $0 \in J$' olduğuna göre bir ideal olur. Dolayısıyla $J \supseteq I$ olacaktır. □

2.3.13 Tanım [4, 1.2.3]

R halkasında $a \in R$ için $a^k = 0$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ tamsayısı bulunabilirse a elemanına R'nin nilpotent elemanı denir. $a^2 = a$ ise a elemanına idempotent eleman denir.

2.3.14 Önerme [8, 4.11]

R bir halka ve $I,J \subseteq R$ idealleri olsun. Eğer $R = I+J$ ve $I \cap J = 0$ ise öyle $e,f \in R$ idempotent elemanları vardır ki $e+f = 1$ ve $ef = fe = 0$ olur.

İspat: 2.3.10 önermesinden dolayı $R = I+J$ eşitliğini $R = I \oplus J$ olarak yazabiliriz. $R = I \oplus J$ de $ef = fe = 0$ ve e,f elemanlarının idempotent olduklarını ispatlayalım. $R = I \oplus J$ ve $e+f = 1$ olacak şekilde $e \in I$ ve $f \in J$ elemanlarını alalım. Öyleyse $ef \in IJ \subseteq I$ ve $ef \in IJ \subseteq J$ için $ef \subseteq I \cap J = 0$ olur. Buradan $ef = fe = 0$ elde edilir. $e = e^2 + ef$ olur ve $e = e^2$ elde edilir. e idempotenttir. Benzer şekilde f'nin de idempotent olduğu görülür. □

2.3.15 Tanım [8, 2.1]

R değişmeli bir halka ve M bir R-modül olsun. Eğer $M \neq 0$ modülünün 0 ve M'den başka alt modülü yoksa M simple (basit) R-modül olur.

Kendisinden ve 0 dan başka ideali olmayan halkalara basit (simple) halka denir [8, sayfa 3].

2.3.16 Önerme [2, 1.2]

R değişmeli bir halka, cisim olabilmesi için gerek ve yeter koşul basit halka olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$): R bir cisim olsun. Öylese $R^{\times} = R \setminus \{0\}$ olacaktır. R'nin basit olmadığını, kendisi ve 0 dışında bir ideali olduğunu varsayalım. R'nin, $Z \subseteq R$ ideali, $Z \neq 0$ olsun. Öyleyse öyle bir $u \in Z \setminus \{0\}$ olacaktır ki, her $x \in R \setminus \{0\}$ için $x = x \cdot u^{-1} \cdot u \in Z \setminus \{0\}$ olur ve $R \setminus \{0\} \subseteq Z \setminus \{0\}$ olur. Böylece $Z = R$ olduğu görülür.

($\Leftarrow$): R basit bir halka olsun. R'nin cisim olduğunu kanıtlayalım. $x \in R \setminus \{0\}$ elemanını alalım. x tarafından gerilen $\langle x \rangle$ idealini düşünelim. R halkası basit halka olduğundan $R = \langle x \rangle = xR = \{rx : r \in R\}$ olur. R halka olduğundan $1 \in R$ vardır öyle ki bir $r \in R$ için $rx = 1$ olacaktır dolayısıyla x elemanı terslenebilirdir. Bu ispat R'nin her $x \neq 0$ elemanı için geçerli olduğundan R bir cisimdir. □

2.3.17 Tanım [11, 3.14]

R değişmeli bir halka ve P, R'nin bir ideali olsun. $P \neq R$ ve her $x, y \in R$ olmak üzere $xy \in P$ olması $x \in P$ ya da $y \in P$ olmasını gerektiriyorsa P'ye R'nin bir asal ideal denir.

2.3.18 Örnek

$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve p bir asal sayı olmak üzere $p\mathbb{Z}$ ideali $\mathbb{Z}$ halkasının bir asal idealidir. Gerçekten $xy \in p\mathbb{Z}$ ise bu durumda $pa = xy$ olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $p \mid xy$ yazabiliriz. p asal olduğundan $p \mid x$ ya da $p \mid y$ olacaktır. Böylece $x \in p\mathbb{Z}$ yada $y \in p\mathbb{Z}$ olacaktır. $p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bir asal ideali olur.

2.3.19 Teorem [11, 3.32]

R değişmeli bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun. I idealinin asal olması için gerek ve yeter şart R/I halkasının tamlık bölgesi olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$): I, R halkasının bir asal ideali olsun. R/I halkasının tamlık bölgesi olduğunu göstermeliyiz. R/I halkasının tamlık böldesi olduğunu göstermek için sıfır bölensiz olduğunu göstermek yeterlidir. $(x+I), (y+I) \in R/I$ olmak üzere $(x+I)(y+I) = 0$ ise $xy + I = 0$ olur. Bu ise $xy + I = 0 + I$ olmasını dolayısıyla $xy \in I$ olmasını gerektirir. I asal ideal olduğundan asal ideal tanımından $x \in I$ yada $y \in I$ olmalıdır. Eğer $x \in I$ ise $x + I = 0 + I$ ve $y \in I$ ise $y + I = 0 + I$ yazılır. Böylece R/I sıfır bölensiz olduğundan tamlık bölgesidir.

($\Leftarrow$): R/I bölüm halkasının tamlık bölgesi olduğunu kabul ederek, I'nın R halkasının asal ideali olduğunu gösterelim. Eğer $xy \in I$ ise $(x+I)(y+I) = xy + I = 0 + I$ yazabilir. Halbuki R/I tamlık bölgesi olduğu için $x + I = 0 + I$ ya da $y + I = 0 + I$ olur ki bu da $x \in I$ yada $y \in I$

olmasını gerektirir. Böylece asal ideal tanımı gözönüne alınarak I'nın R halkasının asal ideli olduğu kolaylıkla görülür. $\square$

2.3.20 Tanım [4, 1.3.23]

R değişmeli bir halka ve R'nin tüm nilpotent elemanlarının bulunduğu I kümesi bir idealdir. I idealine R'nin nilradikali denir. Öyleyse I ideali, $I = \left\{x \in R : \exists n \in \mathbb{N}\, için\, x^n = 0\right\}$ olur.

2.3.21 Tanım [11, 3.15]

M bir modül ve M modülünün bir alt modülü N olsun. M'nin, N'yi kapsayan N'den başka hiç bir alt modülü yoksa N'ye bir maksimal alt modül denir.

R bir halka, $I \neq R$, R'nin bir ideali olsun. I ile R arasında I'yı kapsayan hiç bir ideal yoksa I'ya maksimal ideal denir.

2.3.22 Teorem [11, 3.33]

R bir halka ve M, R'nin bir ideali olsun. R/M'nin basit halka olabilmesi için gerek ve yeter koşul M'nin maksimal ideal olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: R/M basit halka olsun 2.3.16 önermesinden dolayı R/M cisim olur ve M ideli maksimal ideal olmasın. O zaman öyle bir $J \subsetneqq R$ ideali vardır ki $M \subsetneqq J \subsetneqq R$ olur. Öyleyse $x \notin M$ olacak şekilde bir $x \in J$ vardır ve $x + M \in R/M$ olur. R/M cisim olduğundan, bir $y + M \in R/M$ için $(x+M)(y+M) = 1 + M$ olur ve bu durumda $xy + M = 1 + M$ ve dolayısıyla $xy - 1 \in M \subseteq J$ yazılır. Eğer $xy - 1 = t \in J$ ise o zaman xy ve t, J idealinin elemanları olduğundan $1 = xy - t \in J$ yazılır. Diğer taraftan $1 \in J$ olması $J = R$ olmasını gerektirir. O halde R/M cisim olduğunda M, R'nin bir maksimal ideali olur.

$(\Leftarrow)$: M, R'nin maksimal ideali olsun. Bu durumda R/M nin basit olduğunu göstermeliyiz. R/M basit halka olmadığını kabul edelim. O zaman $Z \in R/M$ olacak şekilde bir $Z \neq 0$ ideali vardır. $\pi : R \to R/M$ olacak şekilde π epimorfizmasını yani örten homomorfizmayı tanımlayalım. $\pi^{-1}(Z) \subseteq R$, 2.3.11 önermesinden dolayı bir ideal oldur. Ve $çek(\pi) = M$ olduğu için $M \subseteq \pi^{-1}(Z)$ ve M maksimal olduğundan $\pi^{-1}(Z) = R$ veya $\pi^{-1}(Z) = M$ olmalıdır. $\pi\pi^{-1}(Z) = Z$ ve $\pi^{-1}(Z) = R$ ise $Z = R/M$ olur. Buradan $\pi^{-1}(Z) = M$ ise $Z = M$ bulunur. Böylece M maksimal ideal olduğundan R/M basit halka olacaktır. $\square$

2.3.23 Önerme [11, 3.34]

Her maksimal ideal asaldır.

İspat: M maksimal ideal olsun. R/M, 2.3.22 teoreminden dolayı basit halka olacaktır. Basit halkada 2.3.16 önermesinden dolayı cisim olacaktır. Öyleyse R/M bir cisimdir. Her cisim 2.2.7 önermesinden dolayı bir tamlık bölgesi olduğundan R/M bir tamlık bölgesidir. 2.3.19 teoreminden dolayı M asal ideal olur. Öyleyse M maksimal ideali asaldır. □

2.3.24 Tanım [4, 1.1.1]

S bir küme ve üzerinde bir $\leq$ bağıntısı olan, $(S,\leq)$ sistemi yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa S'ye bir sıralı küme denir.

2.3.25 Önerme (Zorn's Lemma) [4, 1.1.15]

Boş olmayan bir S sıralı kümesinin her zincirinin S de bir üst sınırı varsa , S sıralı kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır.

2.3.26 Teorem [4, 2.4.9]

R bir halka olsun. Eğer $R \neq 0$ ve R bir cisim değilse o zaman R halkasının en az bir tane maksimal ideal vardır.

İspat: ϕ, R'nin bütün idellerinin kümesi ve $\phi \neq \langle 1 \rangle$ olsun, R halkasında ϕ boş küme değildir en az bir elemanı vardır o da 0 dır. İdeallerin (a_α) olacak şekilde herhangi bir zincirini ele alalım. $(a_\alpha) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ bir zincir olduğu için $a_1 \subseteq a_2 \subseteq \ldots \subseteq a_n \subseteq \ldots$ olacak şekilde her i tamsayısı için a_i idealleri $\emptyset$'dan ve R halkasından farklıdır. $a = \bigcup_\alpha a_\alpha$ birleşimini ele alalım. $a = \bigcup_\alpha a_\alpha = R$ olmaz. $a = \bigcup_\alpha a_\alpha = R$ olsaydı öyle bir i için $1 \in a_i$ olurdu. a_i bu durumda ideal olmazdı. $a = \bigcup_\alpha a_\alpha \neq R$ dır. $a = \bigcup_\alpha a_\alpha \neq R$ ve $a = \bigcup_\alpha a_\alpha \neq 0$ 'dir. Ve a bir idealdir ve (a_α) zincirinin maksimal idealidir. ϕ idealler kümesinde ki her zincir için yapılan ispat geçerli olduğundan, her zincirin bir üst sınırı vardır. Öyleyse Zorn's Lemma'ya göre R halkasının en az bir maksimal elemanı vardır. □

2.3.27 Sonuç 1 [4, 2.4.10]

Eğer I, R halkasının bir ideali ve $I \neq (1)$, $I \neq 0$ ise o zaman I'yı içeren bir maksimal ideal vardır.

İspat: I ideali ϕ kümesinin elemanı olup, herhangi bir zincire dahil olacaktır. Dolayısıyla 2.3.26 teoremin de olduğu gibi Zorn's Lemma'ya göre, her zincirin maksimal elemanı vardır. I ideali herhangi bir zincire dahil olduğundan I'yı da kapsayan bir maksimal ideal olacaktır. □

2.3.28 Sonuç 2 [4, 2.4.11]

Her tersinir olmayan eleman R halkasının bir maksimal ideali tarafından kapsanır.

İspat: $x \in R$ terslenir olmadığından, $I = \langle x \rangle$ olacak şeklinde $I \neq R$ ideali bulunabilir. Sonuç 2.3.27 gereği $\langle x \rangle = I \subseteq M$ olacak şekilde halkanın bir M maksimal ideali bulunabilir öyle ki $x \in M$ olacaktır. $\square$

2.3.29 Teorem [4, 2.4.8]

R halkasında M idealinin maksimal ideal olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $x \notin M$ için $1 - rx \in M$ olacak şekilde bir $r \in R$'nin olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: M maksimal ideal ve $x \notin M$ ise $M \subset M + Rx \subseteq R$ olur. Şu halde M maksimal ideal olduğundan $M + Rx = R$ olacaktır. $1 = m + rx$ olacak şekilde bir $r \in R$ ve bir $m \in M$ için $1 - rx = m \in M$ vardır.

$(\Leftarrow)$: N, R halkasının bir ideali ve $M \subset N \subseteq R$ olsun. $x \in N/M$ alalım $x \notin M$ olacaktır. Varsayımımızdan $1 - rx \in M$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Öyleyse $1 - rx = m$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır ve aynı zamanda $M \subset N$ olduğu için $m \in N$ olur. Böylece $1 - rx = m \in N$ olur. $x \in N$ olduğundan $1 \in N$ olacaktır yani $N = R$ olur. M maksimal idealdir. $\square$

2.3.30 Tanım [4, 2.4.29]

Bir tane maksimal ideali olan R halkasına lokal (yerel) halka denir.

2.3.31 Önerme [4, 2.4.30]

R halkasının lokal olabilmesi için gerek ve yeter koşul R halkasının tersinir olmayan elemanlarının bir ideal oluşturmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: R'nin bir tek maksimal ideali M olsun. 2.3.28 sonucundan dolayı M ideali halkanın tersinir olmayan elemanlarından oluşur.

$(\Leftarrow)$: R'nin tersinir olmayan elemanlarının kümesi I bir ideal oluştursun. $0 \in I$ tersinir değildir ve $0_R \neq 1_R$ olduğu için R aşikar halka değildir. Öyleyse 2.3.27 ve 2.3.28 sonuçlarından dolayı, R'nin en az bir maksimal elemanı vardır. M maksimal ideal olduğundan $M = I$ tek maksimal idealdir. $\square$

2.3.32 Önerme [4, 2.4.34]

Lokal halkanın 0 ve 1'den başka hiç bir idempotent elemanı yoktur.

İspat: $e \in R$ bir idempotent eleman ise $e(1-e) = 0$ olur. $e \neq 0$ ve $e \neq 1$ ise $1 - e$ sıfır bölen olduğundan tersinir eleman değildir. R lokal halka olduğundan, tersinir olmayan elemanlar 2.3.31 önermesinden dolayı bir ideal oluşturur. Bu ideale I ideali diyelim $e, (1-e) \in I$ olacaktır. Ama $e + (1-e) = 1 \in I$ olur ve $I = R$'dir. Bu ise bir çelişkidir. Öyleyse $e = 0$ yada $e = 1$ olmalıdır. $\square$

2.4 JACOBSON RADİKAL VE YARI BASİT HALKA

Bu bölümde jacobson radikal idealinin tanımı yapılacak ve yok edenleri ile olan ilişkisi inşaa edilecektir. Konu ile ilgili gerekli tanım ve teoremlere yer verilecektir. Ayrıca yarı basit halkanın tanım ve teoremleri ele alınıp, son olarak nil ideal ve nilpotent ideal tanımlarına yer verilecektir.

2.4.1 Tanım [4, 2.4.36]

R bir halka olmak üzere R'nin tüm maksimal ideallerinin kesişimi de bir idealdir ve bu ideale R halkasının Jacobson Radicali denir. $J(R)$ ile gösterilir.

$$J(R) = \bigcap_{M \subseteq R,\, M\, max\, ideal} M$$

dir. Ayrıca $R = \{0\}$ ise maksimal ideali olmayacağından $J(R) = 0$ olarak tanımlanır.

2.4.2 Teorem [6, 5.2]

R bir halka ve $a \in R$ olsun. $a \in J(R)$ olması için gerek ve yeter koşul her $r \in R$ için $1 - ar \in R$ elemanının tersinir olmasıdır.

İspat:$(\Rightarrow)$: $a \in J(R)$ olsun. Bir $r \in R$ için, $1 - ar$ elemanı tersinir olmasın, 2.3.28 sonucundan dolayı $1 - ar \in M$ olacak şekilde bir M maksimal ideali bulunabilir. $a \in J(R)$ kabul ettiğimizden, $a \in M$'dir ve $1 - ar \in M$ olduğudan, $1 \in M$ çelişkisi bulunur. Şu halde her $r \in R$ için $1 - ar \in R$ elemanı tersinir olmalıdır.

$(\Leftarrow)$: Her $r \in R$ için $1 - ar \in R$ elemanının tersinir olduğunu kabul edelim. $a \in J(R)$ olduğunu göstermek için, a'nın, her M maksimal idealinde olduğunu göstermek yeterlidir. a bir M maksimal idealinde olmasaydı, $M \subseteq M + (a) = R$ olurdu, yani $1 = m + ar$ olacak şekilde bir $r \in R$ ve bir $m \in M$ bulunabilirdi. Kabulümüzden, $1 - ar = m \in M$ tersinir olurdu. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü M maksimal idealinde tersinir eleman bulunmaz. Öyleyse $a \in M$, her M maksimal ideali için doğrudur, $a \in J(R)$ olur. $\square$

2.4.3 Teorem (Nakayama Lemma) [6, 5.7]

R bir halka ve M sonlu üretilmiş bir R-modül olsun. Bu durumda $J(R)M = M$ ise $M = 0$ olur.

İspat: $M = \langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$ sonlu üreteçli bir R-modül olsun. $J(R)M = M$ olduğuna göre her $m \in M$ ve öyle $j_1, j_2, \ldots, j_n \in J(R)$ vardır ki

$$m = j_1 m_1 + j_2 m_2 + \ldots + j_n m_n$$

olur. Özel olarak

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n \in M$$

seçelim.

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + \ldots + m_n &= j_1 m_1 + j_2 m_2 + \ldots + j_n m_n \\ (1 - j_1) m_1 + (1 - j_2) m_2 + \ldots + (1 - j_n) m_n &= 0 \\ (1 - j_1) m_1 &= \sum_{l=2}^{n} (j_l - 1) m_l \\ m_1 &= \sum_{l=2}^{n} (j_l - 1)(1 - j_1)^{-1} m_l \end{aligned}$$

olur. Böylece m_1, diğer elemanlar tarafından yazılabilir. Öyleyse m_1'i silebiliriz. Tümevarım yöntemi ile benzer işlemler yapılarak $m_2, \ldots, m_n$ değerlerini silebiliriz. Böylece $M = \langle m \rangle$ tek üreteçli hale gelecektir.

$M = \langle m \rangle$ ve $J(R)M = M$ ise $jm = m$ olur, $\exists j \in J(R)$ için.

Öyleyse $(1 - j)m = 0$ ve 2.4.2 teoreminden dolayı $r = 1 \in R$ ve $j \in J(R)$ için $1 - j \in R$ terslenebilirdir. Bu yüzden $1 - j \neq 0$ olur ve $m = 0$ bulunur. $M = 0$ olacaktır. □

Not: M modülü sonlu üretilmemiş ise teorem geçerli değildir çünkü tek üreteçli yazılamaz.

2.4.4 Tanım [8, sayfa 53]

S basit bir R-modül olsun. Öyleyse her $x \in S$ için $S = \{rx : r \in R\} = \langle x \rangle$ olur. O zaman $f(r) = rx$ olacak şekilde $f : R \to S$ şeklinde bir R-modül homomorfizması vardır. $\text{çek} f = \{r \in R : rx = 0\}$ idealine S'nin yok edeni denir. Bu ideal $Ann_R(S)$ şeklinde gösterilir. $f : R \to S$ homomorfizması örtendir ve birinci izomorfizma teoreminden dolayı $S \cong R/_{Ann_R(x)}$ olur.

2.4.5 Önerme [8, sayfa 53]

$Ann_R(S) = Ann_R(x)$dir.

İspat: $S = \{tx : \forall t \in R\} = \langle x \rangle$ olsun.

$$Ann_R(S) = \left\{ z \in R : \forall t \in R \, \text{için} \, ztx = 0 \right\}$$

olacaktır. $r \in Ann_R(x) = \{r \in R : rx = 0\}$ olacak şekilde bir r elemanı alalım bu durumda $rx = 0$ olur. Bu da $r(tx) = t(rx) = 0$ demektir, yani $r(tx) = 0$ olur. Buradan $rS = \{0\}$

olacaktır. Yani $r \in Ann_R(S)$'dir. $r \in Ann_R(S)$ ise her $t \in R$ için $rtx = 0$ olur. $t = 1$ alalım, $rx = 0$ olur ve $r \in Ann_R(x)$ bulunur. $Ann_R(S) = Ann_R(x)$ olur. $\square$

2.4.6 Sonuç 1 [10, 8.1]

R bir halka ve S basit modül olsun. $S = R/Ann_R(S)$ basit modül olduğundan 2.3.22 teoremi gereği $Ann_R(S)$ maksimal alt modülüdür.

2.4.7 Sonuç 2 [8, 4.2]

R halkasında $J(R)$, bütün basit S, R-modül yok edenlerinin kesişimidir. Yani

$$J(R) = \bigcap_{S\,basit\,R-mod\ddot{u}l} Ann_R S$$

olur.

İspat: $f : R \to R/Ann_R(S)$ homomorfizmasını düşünelim. 2.3.11 önermesi gereği $M \subseteq R/Ann(S)$ maksimal ideali için $f^{-1}(M) \subseteq R$ maksimal ideal olacaktır. $S = R/Ann_R(S)$ maksimal ideali $M = Ann_R(S)$ olur. Ve bu iki maksimal ideal arasında bire bir denklik bulunur. $J(R)$ maksimal ideallerin kesişimi olduğundan $J(R) = \bigcap_{S\,basit\,R-mod\ddot{u}l} Ann_R S$ olacaktır. $\square$

2.4.8 Teorem [8, 4.8]

R ve $R/J(R)$ aynı basit modüllere sahip olurlar. Aynı zamanda $x \in R$'nin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul π: $R \to R/J(R)$ homomorfizması için $\pi(x) = x'$ olmak üzere x' elemanının $R/J(R)$'nin içersinde terslenebilir olmasıdır.

İspat: $f : R \to R/J(R)$ üzerine homomorfizmasını düşünelim.

1. İddia: Birinci izomorfizma teoreminden dolayı $R \cong R/J(R)$ olur. 2.3.11 önermesi gereği $M \subseteq R/J(R)$ maksimal alt modülü için $f^{-1}(M) \subseteq R$ maksimal alt modülü vardır ve bu iki alt modül birbirlerine izomorftur yani aralarında bire bir denklik vardır. R ve $R/J(R)$ izomorf maksimal ideallere bölündüğünde aynı basit modüllere sahip olurlar.

2. İddia: $(\Rightarrow)$ $x \in R$, R içersinde tersinir olsun. Öyleyse $xy = 1$ olacak şekilde bir $y \in R$ vardır. Öte yandan $1' = \pi(1) = \pi(xy) = \pi(x)\pi(y) = x'y'$ olur. Böylece x', $R/J(R)$'nin içinde tersinir olacaktır. Bu durumda $x'y' = 1'$ olacak şekilde bir $y' \in R/J(R)$ vardır.

$(\Leftarrow)$ x', $R/J(R)$ basit modülünde terslenebilir bir eleman olsun. Bu durumda $y' \in R/J(R)$ vardır ki $x'y' = 1'$ olur. Buradan $1' - x'y' = 0 + J(R) = J(R)$ olacaktır. Öyleyse $1 - xy \in J(R)$ olur ve 2.4.2 teoreminden dolayı $xy \in R$ tersinirdir. xy tersinir ise $(xy)z = x(yz) = 1$ olacak şekilde $z \in R$ vardır. x elemanının R'deki tersi yz olur. $x \in R$ tersinirdir. $\square$

2.4.9 Teorem [4, 2.4.42]

R bir halka olmak üzere $J\left({}^{R}\!/\!_{J(R)}\right) = 0$ dır.

İspat: $I = J(R)$ olsun ve $u \in J({}^{R}\!/\!_{I})$ alalım. 2.4.2 teoremi gereği her $r \in {}^{R}\!/\!_{I}$ için $1 - ur \in {}^{R}\!/\!_{I}$ terslenebilirdir. O zaman öyle bir $v \in {}^{R}\!/\!_{I}$ vardır ki $v(1 - ur) = 1 + I$ olur. Öyleyse $v(1 - ur) = 1 + a$ olacak şekilde $a \in J(R)$ vardır. Yine 2.4.2 teoremi gereği her $w \in R$ için $w(1 - a) = 1$ olur. $v(1 - ur) = {}^{1}\!/\!_{w}$'dir ve bu da her $r \in R$ için $u \in J(R)$ demektir. $u \in J({}^{R}\!/\!_{I}) = J(R)$ olur. Buradan $u = 0$ ve $J\left({}^{R}\!/\!_{J(R)}\right) = 0$ bulunur. $\square$

2.4.10 Önerme [4, 2.4.46]

R halkasının jacobson radikalinde sıfırdan farklı idempotent eleman yoktur.

İspat: $e \neq 0$ ve $e \neq 1$ olacak şekilde e idempotent eleman olsun. Şu halde $0 = e(1 - e)$ olduğundan $1 - e$ sıfır bölendir. Böylece $1 - e$ terslenebilir bir eleman olmadığı için 2.4.2 teoreminden dolayı $e \notin J(R)$ olur. Ayrıca $1 \notin J(R)$ olduğu açıktır. $\square$

2.4.11 Tanım

R halkasında her $I \underset{ideal}{\subseteq} R$ için bir $J \underset{ideal}{\subseteq} R$ varsa öyleki $I + J = R$ ve $I \cap J = \{0\}$ ise R halkası yarı basittir. Ayrıca 2.3.10 önermesinden dolayı $I \oplus J = R$ olur.

2.4.12 Tanım

R halka ve M bir R-modül olsun. Her $N \underset{alt\,modül}{\subseteq} M$ için bir $N' \underset{alt\,modül}{\subseteq} R$ varsa öyleki $N + N' = M$ ve $N \cap N' = \{0\}$ ise M yarı basit R-modül olur. Ayrıca 2.3.10 önermesinden dolayı $N \oplus N' = M$ olur.

2.4.13 Önerme

Yarı basit M, R-modülün tüm alt modülleride yarı basittir. Yani M yarı basit modül ise her $N \subseteq M$ alt modülü için N yarı basit alt modül olur.

İspat: $N \subseteq M$ olsun. N'nin bir alt modülüne L diyelim böylece $L \subseteq N \subseteq M$ olacaktır ve L, M'nin alt modülü olur. M yarı basit olduğundan, $M = L \oplus L_1$ ve bir $L_1 \subseteq M$ için $L \cap L_1 = 0$ olur. M yarı basit olduğundan aynı zamanda $M = N \oplus N_1$ bir $N_1 \subseteq M$ için $N \cap N_1 = 0$ olur. Böylece $M = N \oplus N_1 = L \oplus L_1$ olur ve $L \subseteq N$ olduğundan $L_1 \supseteq N_1$'dir. $L_1 = L_2 \oplus N_1$ yazalım. Böylece $M = L \oplus L_2 \oplus N_1$ olacaktır ve $N = L \oplus L_2$ bulunur. Böylece her N alt modülü yarı basit alt modül olacaktır. $\square$

2.4.14 Tanım

M bir R-modül olsun. M'nin sıfırdan farklı bir alt modülü N olsun. M'nin, N'de kapsanan 0'dan ve N'den başka hiç bir alt modülü yoksa, N'ye bir minimal alt modül denir.

R bir halka ve I, R'nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. I ideli tarafından kapsanan 0'dan ve I'dan başka hiç bir ideli yoksa, I'ya bir minimal ideal denir.

2.4.15 Tanım [4, 1.6.10]

R halkasının bir idealinin her elemanı nilpotent ise bu ideale nil ideal denir. Yani J, R'nin bir ideali olsun, her $x \in J$ için öyle bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki $x^n = 0$ oluyorsa J idealine nil ideal denir.

2.4.16 Tanım [4, 1.6.10]

R bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. I^n ideali, I'dan alınan herhangi bir n elemanın, çarpımlarının sonlu toplamları 0 oluyorsa I idealine nilpotent ideal denir. Şu halde I idealinin nilpotent olması, bir $n \geq 1$ tamsayısı için $I^n = 0$ olması demektir. Yani alınan her $a_1, a_2, \ldots,$ $a_n \in I$ için $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 0$ olur.

Bir idealin nilpotent olması, nil ideal olmasından daha güçlü bir koşuldur. Bir ideal nil olabilir ama nilpotent olması gerekmez.

2.4.17 Önerme [4, 1.6.17]

$i \in I$ bir indeks kümesi olmak üzere I_i, R halkasının sonlu sayıdaki idelleri olsun. Eğer her bir I_i nilpotent ise $I_1 + I_2 + \ldots + I_n$ toplamıda nilpotent olur.

İspat: Tümevarım yöntemi gereğince $m = 2$ için kanıtı yapmak yeterlidir. I_1 nilpotent ideal olduğundan $I_1^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. I_2 nilpotent ideal olduğundan $I_2^r = 0$ olacak şekilde bir r doğal sayısı vardır. Her $z \in I_1 + I_2$ için $z = a + b$ olacak şekilde öyle bir $a \in I_1$ ve öyle bir $b \in I_2$ vardır ki

$$\begin{aligned} z^{n+m} &= (I_1 + I_2)^{n+m} \\ &= (a+b)^{n+m} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğunu ispatlayalım.

Binom açılımından

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+m} &= \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k} + \sum_{k=n+1}^{m} \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k}
\end{aligned}
$$

olur. Ve $a^k = 0$ olduğundan ilk ifade 0 olacaktır, $b^{n+m-k} = 0$ olacağından ikinci ifade 0 olur. Bölece

$$
\begin{aligned}
z^{n+m} &= (I_1 + I_2)^{n+m} \\
&= (a+b)^{n+m} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur. □

2.5 NOETHERYAN VE ARTİNYAN MODÜLLER

Bu bölümde artan zincir koşulu ve noetheryan modül, azalan zincir koşulu ve atinyan modül tanım ve teoremlerine yer verilecektir. Daha sonra kompozisyon serilerinin tanımı yapılıp, artinyan ve noetheryan modüllerde kompozisyon serilerine yer verilecektir. Son olarak J-yarı basit halkalar işlenecektir. Bölüm boyunca modül ve halka teorem ve tanımlarına birlikte yer verilmiştir. Halkalar için yapılan tanım ve teoremler doğal olarak modüller içinde geçerlidir.

2.5.1 Tanım [5, 15.1]

Artan Zincir Koşulu (ACC): R bir halka ve M bir R- modül olsun. M'nin sonlu alt modüllerinin her artan zinciri $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ bir zaman sonra sabitleniyorsa yani bir $N \in \mathbb{N}$ ve her $n \geqslant \mathbb{N}$ için $M_n = M_N$ oluyorsa M modülü artan zincir koşulunu sağlamış olur.

2.5.2 Tanım [5, 15.1]

R bir halka, M bir R-modül olmak üzere M modülü noetheryan olur her alt modülleri ailesi artan zincir koşulunu sağlıyorsa yani, her $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ için öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki bir $N \in \mathbb{N}$ ve $n \geqslant \mathbb{N}$ için $M_n = M_N$ olur. Bu durumda R modülüne noetheryan modül deriz.

2.5.3 Tanım [8, sayfa 20]

R kendi üzerinde bir R-modül olduğu için R modülü noetheryan ise R halkasına noetheryan Halka denir. Yani R halkasının ideallerinin, her artan $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$ zinciri sonlu bir adımda duruyorsa, R'ye noetheryan halka denir.

2.5.4 Örnek

1. $\mathbb{Z}$ Tamsayılar halkası noetheryan bir $\mathbb{Z}$-modüldür. Çünkü $n_1\mathbb{Z} \subseteq n_2\mathbb{Z} \subseteq \ldots$ alt modül zincirinde n_2 böler n_1'dir ve $n_1 \gneqq n_2 \gneqq \ldots$ bir zaman sonra sabitlenecektir.
2. $\mathbb{Z}[x]$ polinom halkası noetheryandır. Ancak sonsuz üreteçli bir polinom halkası olan $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ bir zaman sonra sabitlenmez, noetheryan değildir.

2.5.5 Teorem [5, 15.1.2]

R bir halka ve M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. M bir noetheryan modüldür,
2. M'nin her alt modülü sonlu üretilmiştir,

3. M'nin alt modüllerinden oluşan, boştan farklı her ailenin bir maksimal elemanı vardır.

İspat: $(1 \Rightarrow 2)$: M_1, M'nin sonlu üretilmemiş bir alt modülü olsun. Bir $a_1 \in M_1$ alalım. $M_1 \neq (a_1)$ olduğundan bir $a_2 \in {}^{M_1}/_{(a_1)}$ bulunabilir ve $M_1 \neq (a_1, a_2)$ olduğundan, bir $a_3 \in {}^{M_1}/_{(a_1,a_2)}$ bulunabilir. Bu şekilde devam edersek, bir $a_{k+1} \in {}^{M_1}/_{(a_1,a_2,\ldots,a_k)}$ bulunabilir. Böylece M'nin alt modüllerinin bir sonsuz zinciri elde edilir. Bu ise çelişki oluşturur çünkü M noetheryan olduğu için $(a_1) \subseteq (a_1, a_2) \subseteq \ldots$ alt modülleri dizisi bir zaman sonra sabitlenmelidir. Şu halde M_1 sonlu üretilmiştir.

$(2 \Rightarrow 3)$: M'nin alt modüllerinden oluşan, boştan farklı bir kümeye S diyelim. Yani $\emptyset \neq S \subseteq I(M)$ olsun. M_0, S'nin bir elemanı ve M_0 maksimal değilse, $M_0 \subset M_1$ olacak şekilde, bir $M_1 \in S$ vardır. M_1 maksimal değilse, $M_1 \subset M_2$ olacak şekilde, bir $M_2 \in S$ vardır. Eğer S'nin maksimal elemanı yoksa $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ olacak şekilde bir sonsuz zincir elde ederiz. $I = \cup M_i$ olsun. I, M'nin bir alt modülüdür. I sonlu üretilmiş olduğundan, $I = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ olacak şekilde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ vardır. Şu halde $a_1, a_2, \ldots, a_n$'leri içeren bir M_k bulabiliriz. Böylece $M_k = I$ ve $M_k = M_{k+1} = \cdots$ dır. Bu ise zincirin sonsuz oluşu ile çelişir. Böylece S'nin bir maksimal elemanı vardır.

$(3 \Rightarrow 1)$: M'nin $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ olacak şekilde herhangi bir artan alt modül zincirini göz önüne alalım. 3. denklikten $S = \{M_1, M_2, \ldots\}$ ailesinin bir M_k maksimal elemanı vardır. Şu halde $M_k = M_{k+1} = \cdots$ olacaktır, böylece M noetheryan modül olur. $\square$

2.5.6 Sonuç [8, 1.20]

M bir R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. M'nin noetheryan olabilmesi için gerek ve yeter koşul N'nin ve ${}^{M}/_{N}$'nin noetheryan olmasıdır.

İspat: $(1 \Rightarrow 2)$: M noetheryan modül olsun. M'nin sonlu alt modüllerinin her artan zinciri $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ bir zaman sonra sabitlenir. Yani öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geqslant \mathbb{N}$ için $M_n = M_N$ olur. N alt modülünün içinde $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots. \subseteq N_n \subseteq \ldots.$ olacak şekilde artan bir zincir alalım. Ancak bu zincir aynı zamanda M'nin içindeki bir artan alt modül zinciridir. Dolayısıyla bir noktadan sonra sabitlenir. Öyleyse N noetheryandır. Şimdi $M_1/N \subseteq M_2/N \subseteq \ldots \subseteq M_n/N \subseteq \ldots$ artan zinciri M/N'nin içinde artan bir alt modül zinciri olsun. M_i/N şeklindeki her modül M'in içinde N'yi içeren M_i şeklindeki bir modüle karşılık gelir. Yani $M_i = \pi^{-1}(M_i/N)$ ve $\pi : M \to M/N$ ye giden bölüm homomorfizmasıdır. Dolayısıyla bu modüller $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ sırasını korurlar. M noetheryan olduğu için bu zincir bir noktada sabitlenir, ${}^{M}/_{N}$ noetheryan olur.

$(\Leftarrow)$: M öyle bir R-modül olsun ki sıfırdan ve kendisinden farklı bütün alt modülleri için N ve ${}^{M}/_{N}$ noetheryan olsunlar. M'nin, $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ sonsuz artan alt modülleri zincirini ele alalım. Bu zincirdeki modüllerden en az bir tanesi M'den farklıdır. Bu modül M_k olsun. M_k kabul gereği noetheryandır. Zincirin k. adımdan sonraki kısmı M_k'nın da artan bir zinciridir ve M_k kabul gereği noetheryan olduğu için bu zincir k. adımdan sonra bir indeksle sabitlenir. Böylece M noeteryan olur. □

2.5.7 Teorem [5, 15.1.2]

R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. R noetheryan halkadır,
2. R'nin her ideali sonlu üretilmiştir,
3. R'nin ideallerinden oluşan, boştan farklı her posetin bir maksimal elemanı vardır.

İspat: R halkası kendi üzerinede bir R-modül olduğu için 2.5.5 teoremi kanıttır. □

2.5.8 Tanım [8, sayfa 20]

Azalan Zincir Koşulu (Descending Chain Condition (DDC)): R bir halka ve M bir R-modül olmak üzere M'nin sonlu alt modüllerinin her azalan zinciri $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ bir zaman sonra sabitleniyorsa, yani bir $N \in \mathbb{N}$ ve her $n \geqslant \mathbb{N}$ için $M_n = M_N$ oluyarsa M modülü azalan zincir koşulunu sağlanmış olur.

2.5.9 Tanım [8, sayfa 20]

R bir halka, M bir R-modül olmak üzere M modülü artinyan olur, her alt modülleri ailesi azalan zincir koşulunu sağlıyorsa. Yani her $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ azalan zinciri için $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = M_N$ eşitliği bir $N \in \mathbb{N}$ için sağlıyorsa veya bir $N \in \mathbb{N}$ ve her $n \geqslant \mathbb{N}$ için $M_n = M_N$ oluyorsa M modülüne artinyandır denir.

2.5.10 Tanım

R kendi üzerinde bir R-modül olduğu için R modül artinyan ise bu R halkasına artinyan halka denir. Yani R halkasının ideallerinin, her azalan $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ zinciri sonlu bir adımda durursa, R artinyan halka olur.

2.5.11 Örnek

1. Her cisim artinyan ve noetheryan bir halkadır. Çünkü 0 ve kendisinden başka ideali yoktur. Dolayısıyla idellerinden oluşan her zincir sonlanır.
2. k bir cisim ve M sonlu üreteçli bir vektör uzayı olmak üzere, M artinyan ve noetheryandır.

3. $\mathbb{Z}$ Tamsayılar halkası artinyan değildir. Çünkü $\mathbb{Z} \supsetneqq 2\mathbb{Z} \supsetneqq 4\mathbb{Z} \supsetneqq \ldots$ bir zaman sonra sabitlenmez.

2.5.12 Önerme [4, 5.2.2]

R bir halka ve M bir R-modül olsun. M bir artinyan modüldür ancak ve ancak her kesişim altında kapalı olan alt modüller kümesi Ω'nın en az bir minimal elemanı varsa.

İspat: ($\Rightarrow$): M bir R-modül ve artinyan olsun. M'nin alt modüllerinden oluşan, boş olmayan bir küme Ω alalım. Amacımız, Ω'nın minimal elemanı olduğunu göstermektir. Bunun için Zorn Lemma kullanacağız. Ω'dan azalan bir zincir, $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ alalım. M artinyan olduğu için bu zincir bir indekste sabitlenir. Demek ki bu zincirin minimal elemanı vardır. Zorn Lemmaya göre Ω'nın en az bir minimal elemanı vardır.

($\Leftarrow$): Boş olmayan ve kesişim altında kapalı olan bütün alt modül kümelerinin minimal elemanları olduğunu kabul edelim. M'nin $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ olacak şekilde herhangi bir azalan alt modül zincirini göz önüne alalım. $\Omega = \{M_1, M_2, ..\}$ ailesi kesişim altında kapalı olduğu için bir M_k minimal elemanı vardır. Şu halde $M_k = M_{k+1} = \cdots$ ve böylece M artinyan modül olur. □

2.5.13 Teorem [5, sayfa 751]

R halkasının artinyan halka olabilmesi için gerek ve yeter koşul R halkasının ideallerinin, boş olmayan ve kesişim altında kapalı olan her alt kümesinin bir minimal elemanının olmasıdır.

İspat: R halkası kendi üzerinde bir R-modül olduğu için 2.5.12 teoremi kanıttır. □

2.5.14 Teorem [8, 1.20]

N, M'nin bir alt modülü olsun. M'in artinyan olması için gerek ve yeter koşul N ve ${}^{M}\!/\!{}_{N}$ artinyan olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$): M artinyan modül olsun. M'nin sonlu alt modüllerinin her azalan zinciri $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ bir zaman sonra sabitlenir. Yani öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geqslant \mathbb{N}$ için $M_n = M_N$ olur. N'nin içinde $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots \supseteq N_n \supseteq \ldots$ olacak şekilde azalan bir zincir alalım. Ancak bu zincir aynı zamanda M'nin içindeki bir azalan alt modül zinciridir. Dolayısıyla bir noktadan sonra sabitlenir. Öyleyse N artinyandır. Şimdi $M_1/N \supseteq M_2/N \supseteq \ldots \supseteq M_n/N \supseteq \ldots$ M/N'nin içinde azalan bir alt modül zinciri olsun. $M_\imath/N$ şeklindeki her modül M'in içinde N'yi içeren M_i şeklindeki bir modüle karşılık gelir. $M_i = \pi^{-1}(M_i/N)$ ve $\pi : M \to M/N$'ye giden bölüm homomorfizmasıdır. Dolaısıyla bu modüller $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ sırasını korurlar. M artinian olduğu için bu zincir bir noktada sabitlenir.

($\Leftarrow$): M öyle bir R-modül olsun ki sıfırdan ve kendisinden farklı bütün alt modülleri için N ve M/N artinyan olsun. M'nin, $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ sonsuz azalan alt modülleri zincirini ele alalım. Bu zincirdeki modüllerden en az bir tanesi M'den farklıdır. Bu modül M_k olsun. M_k kabul gereği artinyandir. Zincirin k. adımından sonraki kısmı M_k'nın da azalan bir zinciridir. Dolayısıyla bu zincir k. adımdan sonra bir indeksle sabitlenmelidir. Böylece M artinyandır. $\square$

2.5.15 Önerme [2, 8.4]

R bir artinyan halka olsun. Bu durumda $J(R)$, R'nin en büyük nilpotent idealidir.

İspat: $J = J(R)$ olsun. R artinyan olduğu için, J idelinde azalan zincir koşulu tanımını kullanabiliriz. Öyleyse $J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \ldots$ olur. R artinyan halka olduğundan bir k tamsayısı için $J^k = J^{k+1} = J \cdot J^k = J \cdot J^{k+1} = \cdots$ olur. Nakayama Lemmasına göre $J^k = J \cdot J^k$ olduğu için $J^k = 0$'dir. $\square$

2.5.16 Teorem [8, 2.1]

R yarı basit ve artinyan bir halka olsun. R halkasının minimal ideller ailesi $(m_i)_{i\in I}$ olmak üzere $R = \bigoplus_{i\in I} m_i$ olur.

İspat: ϕ, R'nin sıfırdan farklı bütün ideallerinin kümesi olsun. Zorn's Lemma'ya göre her zincirin minimal idealleri varsa R halkasının en az bir minimal ideali vardır. m_1, R halkasının bir minimal ideali olsun. R yarı basit olduğu için öyle bir $A_1 \subseteq R$ ideali vardır ki $m_1 \oplus A_1 = R$ olur. R yarı basit ve artinyan olduğu için 2.5.14 teoremi ve 2.4.13 önermesine göre A_1 yarı basit ve artinyan olur. Bu sefer ϕ_1 kümesi, A_1 halkası içindeki sıfırdan farklı ideallerin kümesi olsun. Öyleyse ϕ_1 kümesinin bir m_2 minimal idealini göz önüne alalım. A_1 ideali de benzer şekilde yarı basit ve artinyan olduğundan $A_1 = A_2 + m_2$ olur. Bu durumda $A_1 \supseteq A_2$ ve $m_1 \oplus m_2 \oplus A_2 = R$ olacaktır. Bu şekilde devam ederek R halkasın da $(m_i)_{i\in I}$ minimal idealler ailesi oluşturulabilir, öyle ki $R = \oplus_{i\in I} m_i$ minimal ideallerin direk toplamı olarak yazılır. $\square$

2.5.17 Tanım [8, 4.7]

R bir halka, eğer $J(R) = 0$ ise R'ye Jacobson yarı basit denir, J-yarı basit olarak ifade edilir. J-yarı basit halkalarına semi primitive de denir.

2.5.18 Önerme [6, 6.1]

R artinyan bir halka olsun. R halkasının yarı basit olabilmesi için gerek ve yeter koşul $J(R) = 0$ yani Jacobson yarı basit olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$): R halkası yarı basit olsun. $J(R) \subseteq R$ için öyle bir $I \subseteq R$ ideali vardır ki $J(R) \oplus I = R$ olur. R yarı basit olduğundan öyle $e, f \in R$ idempotent elemanları vardır ki $1 = e + f$ ve $e \in J(R)$, $f \in I$ olur. $e \in J(R)$ ise 2.4.2 önermesinden dolayı $1 - e = f \in R$ terslenebilirdir. Ve bir $g \in R$ için $1 = fg$ olur. Öyleyse $f = f^2 g = fg$ olur, bu durumda $g = 1$, $e = 0$ ve $J(R) = 0$ bulunur.

($\Leftarrow$): Jakobson radikal tanımından

$$J(R) = \bigcap_{M \subseteq R, M\, max\, ideal} M_i$$
$$= 0$$

olur, yani maksimal ideallerin kesişimi 0 olur. Öte yandan R yarı basit olduğu için minimal ideallerin direk toplamı olarak yazılabilir ve her M_i maksimal idealini bir m_i minimal ideali dışında kalan bütün minimal ideallerin toplamı şeklinde ifade edebiliriz. Yani $M_i = m_0 \oplus m_1 \oplus \cdots \oplus \hat{m}_i \oplus \cdots \oplus m_n$ olur. $M_i \cap m_i = \emptyset$ olacaktır. Ve 2.3.10 önermesinden dolayı $M_i \oplus m_i = \bigoplus_{i \in I} m_i = R$ olur. R halkası yarı basittir. $\square$

2.5.19 Tanım [6, sayfa 70]

M bir R modül olsun. M'nin alt modüllerinin her artan dizisi $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n = 0$ olacak şekilde $M_1, M_2, \ldots, M_n$ alt modüllerinin her biri diğerinin içinde maksimal ise $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ dizisine kompozisyon serisi denir.

2.5.20 Tanım

R bir halka ve M bir R-modül olsun. M sonlu uzunluktadır eğer kompozisyon serisi varsa. M'nin kompozisyon serisinin uzunluğu M modülünün uzunluğuna eşittir aynı zamanda bütün kompozisyon serilerinin uzunlukları birbirine eşittir.

2.5.21 Örnek

1. k bir cisim olsun. M sonlu bazlı bir k-vektör uzayı olsun. M sonlu uzunluktadır ve uzunluğu kompozisyon serisinin uzunluğuna eşittir. *Eğer* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, M'nin bir bazı ise $Mx_1 \subseteq Mx_1 + Mx_2 \subseteq \ldots \subseteq Mx_1 + Mx_2 + \ldots + Mx_n$ bir kompozisyon serisidir.

2. ${}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}$ halkasının bir kompozisyon serisi $0 \subseteq {}^{2\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}} \subseteq {}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}$ olur. Tabi ki $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ izomorf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ olduğu için $0 \subseteq {}^{3\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}} \subseteq {}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}$ serisi de kompozisyon serisi olacaktır.

2.5.22 Önerme

Kompozisyon serilerinde ${M_i}/{M_{i+1}}$ basit alt modül olur.

İspat: Kompozisyon serilerinde, M bir R-modül ve $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n = 0$ olacak şekilde $M_1, M_2, \ldots, M_n$ alt modüllerinin her biri diğerinin içinde maksimaldir. M_1 modülünün içinde M_2 alt modülü maksimal olduğu için ${M_1}/{M_2}$, 2.3.22 teoreminden dolayı basit olacaktır. Benzer şekilde ${M_i}/{M_{i+1}}$ modülü basit modül olacaktır. $\square$

2.5.23 Önerme

R yarı basit ve artinyan ise o zaman R'nin bütün sonlu üretilen alt modüllerinin kompozisyon serisi vardır.

İspat: R yarı basit ve artinyan ise o zaman R üzerindeki her sonlu modülün kompozisyon serisi vardır. Böylece her modül minimal elemanların toplamı olur. M'nin minimal alt modülleri vardır ve artinyandırlar. M artinyan ise bir M_0 minimal alt modülü vardır. $M = M_0 \oplus N_0$ olacak şekilde bir N_0 artinyan ve yarı basit alt modülü vardır. Bu durumda N_0 alt modülününde bir M_1 minimal elemanı olacaktır. N_0 yarı basit olduğu için $N_0 = M_1 \oplus N_2$ olacak şekilde N_2 artinyan ve yarı basit alt modülü vardır. $M = M_0 \oplus M_1 \oplus N_2$ olur. Benzer şekilde devam ederek M modülünü minimal alt modüllerin toplamı şeklinde yazabiliriz. M artinyan olduğundan bu toplam sonlu olacaktır. $M = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ olur. Hiç bir minimal alt modül tanım gereği diğer bir alt modülü kapsamadığından M_0 alt modülü $M_0 \oplus M_1$ alt modülünün içinde maksimal olacaktır ve benzer şekilde her i doğal sayısı için $M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_{i-1}$ alt modülü $M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_i$ alt modülünün içinde maksimal olacaktır. Böylece $0 = M_0 \subseteq M_0 \oplus M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_n = M$ kompozisyon serisi elde edilir. $\square$

2.5.24 Teorem [8, 4.13]

Herhangi bir R halkası için aşağıdaki üç koşul denktir.

1. R, yarı basit
2. R, J-yarı basit ve artinyan
3. R, J-yarı basit ve temel idealler için DCC'yi sağlar.

İspat: $(1 \Rightarrow 2)$: R yarı basit, $I = J(R)$ olsun. Bu durumda 2.3.14 önermesi gereği, öyle bir J ideali ve e, f idempotent elemanları ($e^2 = e$ ve $f^2 = f$) vardır ki $I = eR$, $J = fR$ ve $R = I \oplus J$ ve $I \cap J = \{0\}$ olur. $e + f = 1$ sağlanır. $f = 1 - e$ ve $e \in I$ olduğundan f terslenir bir eleman olur. $f^2 = f$ olduğu için $f = 1$ ve $e = 0$ olur. Böylece $I = eR = 0$ olur. Yani $I = J(R) = 0$ bulunur ve 2.5.18 önermesinden dolayı artinyan olur.

$(2 \Rightarrow 3)$: R, J-yarı basit ve artinian ise R, J-yarı basit ve özel olarak temel idealler için DDC'yi sağlar.

R halkasının ideallerinin her azalan $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ zinciri artinyan olduğu için sonlu bir adımda duracaktır. Yani öyle bir k tamsayısı için, $I_n = I_k$ iken $n \geq k$ olacaktır. Bu da DDC'yi sağlamaktadır.

$(3 \Rightarrow 1)$: R'nin aşağıdaki iki özelliği vardır.

(a) R'nin sıfırdan farklı her ideali içersinde, sıfırdan farklı minimal bir ideal vardır.

(b) Her minimal J ideali $_RR$'nin ($_RR$ tanımı ile R halkasının kendi üzerinde R modülünü ifade etmekteyiz) bir direk toplamı olur. Ayrıca $_RR = J \oplus M$ olacak şekilde maksimal bir M ideali vardır.

Varsayalım ki R yarı basit olmasın. Şimdi minimal bir J_1 ideali alıp $_RR = J_1 \oplus I_1$ olarak ifade edelim. $I_1 \neq 0$ ve **(a)** özelliğinden dolayı bir minimal $J_2 \subset I_1$ ideali vardır. **(b)** özelliğinden dolayı J_2, $_RR$ de direk toplam ve I_1 içinde direk toplam olur. O halde $I_1 = J_2 \oplus I_2$ olacak şekilde I_2 vardır. Bu şekilde devam edersek $I_1 \supsetneqq I_2 \supsetneqq .... \supsetneqq I_n \supsetneqq ....$ olacaktır. Bunlar R'de direk toplamlar olduklarından, R'nin principal idealleri olurlar. Ama bu DDC'yi sağlamayacaktır. Çelişki doğar, öyleyse R yarı basittir. $\square$

2.5.25 Sonuç

R artinyan ise $R/J(R)$ yarı basit olur.

2.5.26 Tanım

$\{A_i\}_{i \in I}$ artan yada azalan sonlu bir dizi olsun. Artan dizinin faktörü A_i/A_{i+1} ve azalan dizinin faktörü A_i/A_{i-1} olur.

2.5.27 Tanım

M bir R-modül olmak üzere $\{x_i\}_{i \in I}$ ve $\{y_i\}_{i \in I}$ sonlu uzunlukta alt modül zincirleri olsun. Her i için öyle bir j, l vardır ki $y_i/y_{i+1} \cong x_j/x_l$ oluyorsa $\{x_i\}_{i \in I}$ dizisi $\{y_i\}_{i \in I}$ dizisinin inceltilmiş hali olur.

2.5.28 Teorem (Schreier-Zassenhaus) [6, 7.1]

M bir R-modül olmak üzere $\{x_i\}_{i \in I}$ ve $\{y_i\}_{i \in I}$ sonlu uzunlukta alt modül zincirleri olsun. Bu iki zinciri birleştirdiğimizde (birini diğerinin içinde inceltiğimizde) eşit uzunlukta faktörlere sahip olurlar öyle ki faktörler izomorftur.

2.5.29 Teorem [8, 1.19]

M bir R-modül olmak üzere aşağıdakiler denktir

1. M noetheryan ve artinyandır.
2. M'nin alt modüllerinin her zinciri sonludur.
3. M modülü sonlu uzunluktadır yani kompozisyon serisidir.

İspat: $(1 \Rightarrow 3)$: M modülü artinyan olduğu için 2.5.12 önermesinden dolayı, M_1 minimal alt modülü vardır ve M artinyan olduğu için 2.5.14 teoremi gereği, M/M_1 de artinyandır. Öyleyse M/M_1'nin minimal alt modülü M_2/M_1 olsun. Bu durumda $M \supseteq M_2$ ve $M_2 \supseteq M_1$ olacaktır. M/M_1'nin minimal alt modülü M_2/M_1 ise M_1, M_2 alt modülünde maksimal olacaktır. Benzer şekilde devam edersek, her M_n/M_{n-1} minimal olduğu için M_{n-1}, M_n alt modülünde maksimal olacaktır. Böylece M'nin artan alt modülleri zincirini elde ederiz bu zincir belli bir zaman sonra sabitlenecektir çünkü M modülü noetheryandır. Yani $R = M_n \supseteq M_{n-1} \supseteq .... \supseteq M_1 = 0$ olacak şekilde $M_n, M_{n-1}, ...M_1$ alt modüllerinin her biri diğerinin içinde maksimaldir. Bu durumda M artinyan ve noetheryan ise bu zincir sonlu olacaktır ve bu durumda M kompozisyon serisidir.

$(1 \Rightarrow 2)$: M noetheryan olduğu için 2.5.5 teoreminden dolayı alt modüllerinden oluşan her zincir sonlu olur.

$(3 \Rightarrow 1)$: M'nin azalan bir kompozisyon serisini alalım. $M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \dots \supsetneqq M_n \supsetneqq 0$ olsun. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, M'nin artan yada azalan bir alt modül zinciri olsun. Bu zincirin sabitlenmediğini varsayalım. O zaman öyle bir alt modül zinciri bulabiliriz ki $A_0 \supsetneqq A_1 \supsetneqq \dots \supsetneqq A_m$ ve $m \gneqq n$ olur. Bu durumda Schreier-Zassenhaus İncelme Teoremi'ne göre öyle bir zincir bulabiliriz ki $B_0 \supsetneqq B_1 \supsetneqq \dots \supsetneqq B_k$ ve $k \geq max\{n, m\}$ olur. Bu durumda $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hem $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ serisini hem $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompozisyon serisini içerir. Oysa kompozisyon serisi bulabileceğimiz en uzun seridir [2, 6.7]. Bu yüzden $A_0 \supsetneqq A_1 \supsetneqq \dots \supsetneqq A_m$ ve $m \gneqq n$ olamaz. Bu bir çelişkidir. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sonlu uzunlukta olmalıdır, yani bir zaman sonra sabitlenmelidir. □

2.6 HOPKİNS-LEVİTSKİ TEOREMİ (1939) [8, 4.15]

R bir halka, $J(R)$ nilpotent, $\overline{R} = {}^{R}/_{J(R)}$ yarı basit olsun (böyle bir R halkasına semi primary denir). Bu durumda herhangi bir R modül M için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. M noetheryan
2. M artinyan
3. M'nin bir kompozisyon serisi vardır.

Özel olarak

(a) Bir halkanın artinyan olması için gerek ve yeter koşul bu halkanın noetheryan ve semi primary olmasıdır.

(b) Artinyan bir halka üzerindeki herhangi bir sonlu üreteçli modülün bir kompozisyon serisi vardır.

İspat: Artinyan bir halkada 2.5.15 teoreminden dolayı $J(R)$ nilpotent ideal olur ve 2.5.25 teoreminden dolayı $\overline{R} = {}^{R}/_{J(R)}$ yarı basit olacaktır. Böylece artinyan bir halka semi primary olur. Artık **(a)** iddiası R modülüne (1) ve (2) denkliğinin uygulanması ile elde edilir. Artinyan halka üzerindeki sonlu üreteçli bir modül 2.5.14 teoreminden dolayı yine artinyan olacağından (2) ve (3) denkliğinden **(b)** elde edilir.

$(3 \to 1)$ ve $(3 \to 2)$: 2.5.29 önermesinden dolayı, bir M modülün artinyan ve noaterian olması için gerek ve yeter koşul M'nin sonlu bir kompozisyon serisine sahip olmasıdır. Dolayısıyla $(3) \Rightarrow (1)$ ve $(3) \Rightarrow (2)$ önermeleri doğrudur. Kanıtı tamamlamak için $(1) \Rightarrow (3)$ ve $(2) \Rightarrow (3)$ iddalarını semi primary halkalar için kanıtlamalıyız.

$(1\text{ve } 2 \to 3)$: R halkası semiprimary yani $J(R)$ nilpotent ve $\overline{R} = {}^{R}/_{J(R)}$ yarı basit olur. Ve M noetheryan ve artinyan bir R-modül olsun. $J(R)$ nilpotent olduğu için $J(R) \supseteq J(R)^2 \supseteq J(R)^3 \supseteq \ldots \supseteq J(R)^n = 0$ olacak şekilde pozitif n tamsayısı bulabiliriz. Bu n tamsayısını sabitleyelim ve $J(R) = J$ diyelim. $J^n = 0$ olur. Aşağıdaki azalan diziyi göz önüne alalım. $M \supseteq JM \supseteq J^2M \supseteq J^3M \supseteq \ldots \supseteq J^nM = 0$ (1) olur. Bu dizi kompozisyon serisi değildir. Ama bu diziden kompozisyon serisi oluşturmaya çalışalım. 2.6.1 açıklamasında olduğu gibi M'nin bir kompozisyon serisine sahip olduğunu kanıtlamak için azalan dizideki her bir terim için $N = {}^{J^iM}/_{J^{i+1}M}$ ifadesinin kompozisyon serisine sahip olduğunu kanıtlamak yeterli olacaktır.

Öte yandan $\overline{R} = {}^{R}/_{J(R)}$ olsun. 2.4.9 teoremi gereği $J\left({}^{R}/_{J(R)}\right) = J\left(\overline{R}\right) = 0$ olur. N bir R-modül. N'nin $\overline{R} = {}^{R}/_{J(R)}$ modül olabilmesi için önsav gereği $J(R)N = 0$ olmalıdır. ${}^{J^iM}/_{J^{i+1}M}$ modülü bu şartı sağlar ve dolayısıyla bu modül bir $\overline{R}$-modülüdür. Gerçekten $J \cdot {}^{J^iM}/_{J^{i+1}M} = 0$ dır. R artinyan ise 2.5.14 teoremi gereği $\overline{R} = {}^{R}/_{J(R)}$ artinyan olur. Kabul gereği $\overline{R} = {}^{R}/_{J(R)}$ yarı basittir. Dolayısıyla bir modül yarı basit ve artinyan ise 2.4.13 önermesi ve 2.5.14 $\square$teoremi gereği alt modülü de yarı basit ve artinyan olacaktır. $^{J^iM}/_{J^{i+1}M}$ alt modülünün 2.5.23 önermesinden dolayı kompozisyon serisi vardır. □

2.6.1 Açıklama [10, 8.1]

M bir R-modül ve sonlu artan bir alt modüller dizisini ele alalım. Bu dizi için kompozisyon serisinin nasıl oluşturulduğuna bakalım. $A \subseteq B \subseteq C$ olacak şekilde sonlu bir dizisi olsun. $0 \subseteq {}^{B}/_{A} \subseteq {}^{C}/_{A}$ olur. ${}^{B}/_{A}$ için bir kompozisyon serisi varsa ${}^{M_0}/_{A} \subseteq {}^{M_1}/_{A} \subseteq \cdots \subseteq {}^{M_n}/_{A}$ olur ve $A = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = B$ olacaktır. Benzer şekilde B ve C alt modüllerinin arasında bir kompozison serisi oluşturularak $A = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = B \subseteq N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_m = C$ olacak şekilde bir kompozisyon serisi elde edilir. Bu yüzden M, R-modülün kompozisyon serisi olduğunu ispatlamak için dizide ${}^{B}/_{A}$ gibi herhangi bir alt modülün kompozisyon serisi olduğunu ispatlamak yeterlidir. □

2.6.2 Önsav [6, 6.3]

M bir R-modül. M bir $\overline{R} = {}^{R}/_{J(R)}$ modül olabilmasi için gerek ve yeter koşul $J(R)M = 0$'dir.

İspat: M bir R-modül olsun. 2.2.1 tanımından dolayı $f : R \times M \to M$; $r \in R$ ve $m \in M$ için $f(r,m) = rm$ olur. M'nin $\overline{R} = {}^{R}/_{J(R)}$ modül olabilmasi için $\psi : {}^{R}/_{J(R)} \times M \to M$ fonksiyonunu $\psi(r + J(R), m) = (r + J(R))m$ şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonun iyi tanımlı olması gerekir. $J(R) = J$, her $x, y \in R$ ve $m \in M$ için $x + J = y + J$ ise $(x + J)m = (y + J)m$ olur mu? $x + J = y + J \Leftrightarrow x - y \in J$ olur. $\psi(x + J, m) = (x + J)m = (y + J)m = \psi(y + J, m)$ olabilmesi için $(x + J)m = (y + J)m$ olur. Buradan $(x + J)m - (y + J)m = 0$ ve $(x - y + J)m = 0$ olması gerekir. $JM = 0$ bulunur. □

3 KOCEBİRLER İÇİN HOPKİNS-LEVİTSKİ TEOREMİ

3.1 KOCEBİR, KOİDEAL VE KOALTCEBİR

Bu bölümde bir kocebirin inşaasını, kocebirlerle ilgili örnekler, koideal, koaltcebir, komodül tanımlarını ve ilgili teoremlerini göreceğiz. Son olarak kocebirler için Hopkins-Levitzki Teoremini ispatlayacağız. Bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe vektör uzaylarını sonlu boyutlu olarak ele alacağız.

3.1.1 Açıklama

1. Bölümde bir vektör uzayının duali ile ilgili olan açıklamalarda, V ve W vektör uzayları olmak üzere $f : V \to W$ lineer dönüşümü için $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ lineer dönüşümünün varlığını gördük. Ayrıca $(V \otimes W)^\vee = V^\vee + W^\vee$ olduğunuda birinci bölümdeki açıklamalardan biliyoruz. Bu durumda cebirler için bu iki özelliği ele alalım ve $\mu : V \otimes V \to V$ lineer dönüşümü için $\mu^\vee : V^\vee \to V^\vee \otimes V^\vee$ olacaktır. Böylece cebirin dualinden oluşan yapıya kocebir diyeceğiz.

3.1.2 Karşılaştırma

Cebirsel bir yapı ile kocebirsel bir yapıyı karşılaştırırsak:

Cebir [9, 7.1]: 2.1.40 tanımında verdiğimiz cebir tanımını karşılaştırma yapabilmek için tekrar yazıyoruz. U, k cismi üzerinde bir vekör uzayı olsun. Bu durumda $\mu : U \otimes U \to U$ çarpma operasyonu vardır ve bir cebir aşağıdaki iki özelliği sağlar

1. Birleşme Özelliği:

$$\begin{array}{ccc} U \otimes U \otimes U & \xrightarrow{id \otimes \mu} & U \otimes U \\ {\scriptstyle \mu \otimes id} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mu} \\ U \otimes U & \xrightarrow[\mu]{} & U \end{array}$$

2. Birim Elemen Özelliği:

$$\begin{array}{ccccc} U \otimes U & \xleftarrow{1 \otimes id} & U & \xrightarrow{id \otimes 1} & U \otimes U \\ {\scriptstyle \mu} \downarrow & \nearrow & & \nwarrow & \downarrow {\scriptstyle \mu} \\ U & & & & U \end{array}$$

Kocebir [9, 7.2]: U, k cismi üzerinde bir vekör uzayı ve $\triangle : U^\vee \to U^\vee \otimes U^\vee$ operasyonu için aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa bu sisteme bir kocebirdir denir.

1. Kobirleşme Özelliği

$$
\begin{tikzcd}
U^{\vee}\otimes U^{\vee}\otimes U^{\vee} & U^{\vee}\otimes U^{\vee} \arrow[l, "id\otimes\triangle"'] \\
U^{\vee}\otimes U^{\vee} \arrow[u, "\triangle\otimes id"] & U^{\vee} \arrow[l, "\triangle"] \arrow[u, "\triangle"']
\end{tikzcd}
$$

2. Kobirim Elemen Özelliği

$$
\begin{tikzcd}
U^{\vee}\otimes U^{\vee} \arrow[d, "\varepsilon\otimes id"'] & & U^{\vee} \arrow[ll, "\triangle"'] \arrow[rr, "\triangle"] & & U^{\vee}\otimes U^{\vee} \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\
U^{\vee} \arrow[urr] & & & & U^{\vee} \arrow[ull]
\end{tikzcd}
$$

3.1.3 Tanım [10, sayfa 4]

X bir küme olsun. $C = k\{X\}$, k üzerine X tarafından gerilen vektör uzayı olmak üzere k üzerine tanımlanan kocebir aşağıdaki gibidir.

$k\{X\} = span_k(X)$ ve her $x \in X$ için $\triangle : k\{X\} \to k\{X\} \otimes k\{X\}$ ve $\varepsilon : k\{X\} \to k$ işlemleri geçerli iken kobirleşme, kobirim özellikleri sağlanıyorsa bu sisteme kocebir adı verilir. Kocebirin kodeğişmeli cebir olarak adlandırılması için kodeğişme özelliğine sahip olması gerekir.

K1. Kobirleşme Özelliği: Her $x \in C$ için

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\triangle"] \arrow[d, "\triangle"'] & C\otimes C \arrow[d, "id\otimes\triangle"] \\
C\otimes C \arrow[r, "\triangle\otimes id"'] & C\otimes C\otimes C
\end{tikzcd}
$$

K2. Kobirim Özelliği: Her $x \in C$ için

$$
\begin{tikzcd}
C\otimes C \arrow[d, "\varepsilon\otimes id"'] & & C \arrow[ll, "\triangle"'] \arrow[rr, "\triangle"] & & C\otimes C \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\
C \arrow[urr] & & & & C \arrow[ull]
\end{tikzcd}
$$

K3. Kodeğişme Özelliği: $\varphi : C \otimes C \longrightarrow C \otimes C$ fonksiyonu tanımlayalım öyleki $\varphi(a,b) = (b,a)$ ve $\varphi(\triangle) = \triangle$ olur. Yani

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\triangle"] \arrow[dr, "\triangle"'] & C\otimes C \arrow[d, "\varphi"] \\
& C\otimes C
\end{tikzcd}
$$

fonksiyonun şematik gösterimidir.

3.1.4 Örnek [10, sayfa 6]

X bir küme olsun. $C = k\{X\}$, k üzerine X tarafından gerilen vektör uzayı olmak üzere k üzerine tanımlanan kocebir aşağıdaki gibidir.

$k\{X\} = span_k(X)$ ve her $x \in X$ için $\triangle : k\{X\} \to k\{X\} \otimes k\{X\}$ işlemi örnek olarak $\triangle(x) := x \otimes x$ ve $\varepsilon : k\{X\} \to k$ işlemi örnek olarak $\varepsilon(x) := 1$ her x elemanı için geçerli iken kobirleşme, kobirim özellikleri sağlanıyorsa bu sisteme kocebir adı verilir. Kocebirin kodeğişmeli cebir olarak adlandırılması için kodeğişme özelliğine sahip olması gerekir.

K1. Kobirleşme Özelliği: Her $x \in C$ için

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\triangle"] \arrow[d, "\triangle"'] & C \otimes C \arrow[d, "id\otimes\triangle"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\triangle\otimes id"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

ifadesini elemanları ile ifade edersek

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\triangle"] \arrow[d, "\triangle"'] & x \otimes x \arrow[d, "id\otimes\triangle"] \\ x \otimes x \arrow[r, "\triangle\otimes id"'] & x \otimes x \otimes x \end{tikzcd}$$

olur.

K2. Kobirim Özelliği: Her $x \in C$ için

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[d, "\varepsilon\otimes id"'] & C \arrow[l, "\triangle"'] \arrow[r, "\triangle"] & C \otimes C \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\ C \arrow[ur] & & C \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ifadesini elemanları ile ifade edersek

$$\begin{tikzcd} x \otimes x \arrow[d, "\varepsilon\otimes id"'] & x \arrow[l, "\triangle"'] \arrow[r, "\triangle"] & x \otimes x \arrow[d, "id\otimes\triangle"] \\ x \arrow[ur] & & x \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

olur.

K3. Kodeğişme Özelliği: $\varphi : C \otimes C \longrightarrow C \otimes C$ fonksiyonu tanımlayalım öyleki $\varphi(a,b) =$

(b,a) ve $\varphi(\triangle) = \triangle$ olur. Yani

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\triangle} & C\otimes C \\ & \underset{\triangle}{\searrow} & \downarrow^{\varphi} \\ & & C\otimes C \end{array}$$

fonksiyonun şematik gösterimidir.

3.1.5 Örnek

$V = k\{X\}$ vektör uzayı olsun. $1 \in X$ baştan belirtilmiş özel bir eleman olmak üzere,

$\triangle : k\{X\} \to k\{X\} \otimes k\{X\}$ işlemi $\triangle(x) = \begin{cases} (1\otimes x) + (x\otimes 1) & , her\ x \neq 1 \\ 1\otimes 1 & , x = 1 \end{cases}$ olsun.

$\varepsilon : k\{X\} \to k$ işlemi $\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & her\ x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ olsun.

Bu sistemin bir kocebir olduğunu gösterelim.

K1. Kobirleşme Özelliği

$\triangle(x) = 1\otimes x + x\otimes 1$ dir. Koçarpma fonksiyonu $\triangle$'yı ikinci elemanlar üzerine uygularsak

$$\begin{aligned} (id\otimes\triangle)(1\otimes x + x\otimes 1) &= 1\otimes\triangle(x) + x\otimes\triangle(1) \\ &= 1\otimes 1\otimes x + 1\otimes x\otimes 1 + x\otimes 1\otimes 1 \end{aligned}$$

olur. $\triangle$'yı 1. elemenlar üzerine uygularsak

$$\begin{aligned} (id\otimes\triangle)(1\otimes x + x\otimes 1) &= \triangle(1)\otimes x + \triangle(x)\otimes 1 \\ &= 1\otimes 1\otimes x + 1\otimes x\otimes 1 + x\otimes 1\otimes 1 \end{aligned}$$

olacaktır. İki ifade birbirine eşit oldukları için kobirleşme özelliği vardır.

K2. Kobirim Özelliği

$\triangle(x) = 1\otimes x + x\otimes 1$ dir. ε'nu birinci elemanlar üzerine uygularsak

$$\begin{aligned} \varepsilon(1)\otimes x + \varepsilon(x)\otimes 1 &= 1\otimes x \\ &= x \end{aligned}$$

olur. ε'nu ikinci elemanlar üzerine uygularsak

$$
\begin{aligned}
1 \otimes \varepsilon(x) + x \otimes \varepsilon(1) &= x \otimes 1 \\
&= x
\end{aligned}
$$

olur. İki ifade birbirlerine eşit olduğu için cobirim özelliği mevcuttur.

K3. Kodeğişme Özelliği

$\varphi : U \otimes U \longrightarrow U \otimes U$ fonksiyonu tanımlayalım öyleki $\varphi(a,b) = (b,a)$ ve $\varphi(\triangle) = \triangle$ olmalı. Öyleyse $\triangle(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ için $\varphi(\triangle(x)) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ olacaktır. Toplama işleminin değişme özelliği olduğundan

$$
\begin{aligned}
\varphi(\triangle(x)) &= x \otimes 1 + 1 \otimes x \\
&= 1 \otimes x + x \otimes 1 \\
&= \triangle
\end{aligned}
$$

olur.

Sistem bir kodeğişmeli kocebirdir.

3.1.6 Örnek

$V = Span(a, D, 1)$ üç boyutlu vektör uzayı olsun.

$$
\triangle(x) = \begin{cases} 1 \otimes 1 & , x = 1 \\ a \otimes a & , x = a \\ 1 \otimes D + D \otimes a & , x = D \end{cases} \quad ve \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & , x = 1 \\ 1 & , x = a \\ 0 & , x = D \end{cases}
$$

sistemi kocebirdir ancak son formülden dolayı kodeğişmeli değildir.

K1. Kobirleşme Özelliği: a ve 1 elemanları için sistemin kobirleşme özelliğinin varlığı daha önceki örneklerden kolaylıkla görülebilir. D elemanı için kobirleşme özelliğinin varlığını bulmamız yeterlidir.

$$
\begin{array}{ccc}
D & \xrightarrow{\triangle} & 1 \otimes D + D \otimes a \\
{\scriptstyle\triangle}\downarrow & & \downarrow^{id \otimes \triangle} \\
1 \otimes D + D \otimes a & \xrightarrow[\triangle \otimes id]{} & 1 \otimes 1 \otimes D + 1 \otimes D \otimes a + D \otimes a \otimes a
\end{array}
$$

olur. Sistem kobirleşme özelliğini sağlar.

K2. Kobirim Özelliği: a ve 1 elemanları için sistemin kobirim özelliğinin varlığı daha önceki örneklerden kolaylıkla görülebilir. D elemanı için kobirim özelliğinin varlığını bulmamız yeterlidir.

$$\begin{tikzcd}
1\otimes D+D\otimes a \arrow[d, "\varepsilon\otimes id"'] & D \arrow[l, "\triangle"'] \arrow[r, "\triangle"] & 1\otimes D+D\otimes a \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\
D \arrow[ur] & & D \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

olur. Sistem kobirim özelliğini sağlar.

K3. Kodeğişme Özelliği

$\varphi(\triangle(D)) = \varphi(1\otimes D + D\otimes a) = D\otimes 1 + a\otimes D \neq \triangle(D)$ olacaktır. Sistem kodeğişmeli değildir.

Sonuç olarak sistem bir kocebirdir ancak kodeğişmeli değildir.

3.1.7 Örnek

G sonlu bir grup $k(G) := \{G'den\, k'ya\, giden\, tüm\, fonksiyonlar\}$ ve $\star$ işlemi $k(G)$ fonksiyonunun işlemi olmak üzere $f,g\in k(G)$ ise

$$\begin{aligned} f\star g(x) &= \sum_{zt=x} f(z)g(t) \\ &= \sum_{t\in G} f(xt^{-1})g(t) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda $\triangle : k\{G\} \to k\{G\}\otimes k\{G\}$ koçarpma fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} \triangle(g) &= \sum_{zt=x} z\otimes t \\ &= \sum_{t\in G} xt^{-1}\otimes t \end{aligned}$$

ve $\varepsilon : k\{X\} \to k$ işlemi

$$\varepsilon(g) = \begin{cases} 0 & , her\ g\neq 1 \\ 1 & , g=1 \end{cases}$$

olsun. Sisteminin kocebir olduğunu gösterelim.

K1. Kobirleşme Özelliği:

$$\begin{array}{ccc} G & \overset{\triangle}{\rightarrow} & G\otimes G \\ \triangle\downarrow & & \downarrow_{id\otimes\triangle} \\ G\otimes G & \underset{\triangle\otimes id}{\rightarrow} & G\otimes G\otimes G \end{array}$$

ifadesi için

$$\begin{array}{ccc} g & \overset{\triangle}{\longmapsto} & \sum_{t\in G} xt^{-1}\otimes t \\ \triangle\downarrow & & \downarrow_{id\otimes\triangle} \\ \sum_{t\in G} xt^{-1}\otimes t & \underset{\triangle\otimes id}{\longmapsto} & ? \end{array}$$

Önce sağa sonra aşağıya doğru olan yol ile

$$\begin{aligned} (id\otimes\triangle)\left(\sum_{t\in G} xt^{-1}\otimes t\right) &= \sum_{t\in G} xt^{-1}\otimes\triangle(t) \\ &= \sum_{t\in G} xt^{-1}\otimes\left(\sum_{k\in G} tk^{-1}\otimes k\right) \\ &= \sum_{t,k\in G} xt^{-1}\otimes tk^{-1}\otimes k \end{aligned}$$

eşitliği oluşur. Önce aşağıya sonra sağa doğru olan yol ile

$$\begin{aligned} (\triangle\otimes id)\left(\sum_{t\in G} xt^{-1}\otimes t\right) &= \sum_{t\in G} \triangle\left(xt^{-1}\right)\otimes t \\ &= \sum_{t\in G}\left(\sum_{n\in G} xt^{-1}n^{-1}\otimes n\right)\otimes t \\ &= \sum_{t,n\in G} xt^{-1}n^{-1}\otimes n\otimes t \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. 2. eşitlikte $n = kt^{-1}$ dönüşümü yapılırsa

$$(\triangle\otimes id)\left(\sum_{t\in G} xt^{-1}\otimes t\right) = \sum_{t,k\in G} xk^{-1}\otimes kt^{-1}\otimes t$$

elde edilir ve $k = t$, $t = k$ dönüşümleri için iki eşitlik birbirine eşit olur. Kobirleşme özelliği vardır.

K2. Kobirim Özelliği:

$$\begin{array}{ccccc} G & \overset{\varepsilon\otimes id}{\leftarrow} & G\otimes G & \overset{id\otimes\varepsilon}{\rightarrow} & G \\ & \nwarrow & \uparrow\triangle & \nearrow & \\ & & G & & \end{array}$$

ifadesi için

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{zt=g} 1\otimes t & \overset{\varepsilon\otimes id}{\leftarrow} & \sum_{zt=g} z\otimes t & \overset{id\otimes\varepsilon}{\rightarrow} & \sum_{zt=g} z\otimes 1 \\ & \searrow & \uparrow\triangle & \swarrow & \\ & & g & & \end{array}$$

eşitliği elde edilir. Kobirim mevcuttur.

3.1.8 Örnek

G devirli bir grup olsun ve üretecine de t diyelim. O zaman

$\triangle : k\{G\} \to k\{G\}\otimes k\{G\}$ şeklinde tanımlanan $\triangle(t^m) = \sum_{i=0}^{m} t^i \otimes t^{m-i}$ ve $g = t^m$ fonksiyonu ve

$$\varepsilon\left(t^i\right) = \begin{cases} 0 & , \, her\ i \geq 1 \\ 1 & , \, i = 0 \end{cases}$$

olan fonksiyon G ile gerilen vektör uzayı $k\{G\}$ üzerinde bir kocebir tanımlar.

K1. Kobirleşme Özelliği:

$g = t^m$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} G & \overset{\triangle}{\rightarrow} & G\otimes G \\ \triangle\downarrow & & \downarrow_{id\otimes\triangle} \\ G\otimes G & \underset{\triangle\otimes id}{\rightarrow} & G\otimes G\otimes G \end{array}$$

ifadesi için

$$\begin{array}{ccc} g = t^m & \xrightarrow{\triangle} & \sum_{i=0}^{m} t^i \otimes t^{m-i} \\ \triangle\downarrow & & \downarrow_{id\otimes\triangle} \\ \sum_{i=0}^{m} t^i \otimes t^{m-i} & \xrightarrow[\triangle\otimes id]{} & ? \end{array}$$

Önce sağa sonra aşağıya doğru gidilen yol ile

$$\begin{aligned}(id\otimes\triangle)\left(\sum_{i=0}^{m} t^i\otimes t^{m-i}\right) &= \sum_{i=0}^{m} t^i\otimes\triangle\left(t^{m-i}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m} t^i\otimes\left(\sum_{l=0}^{m-i} t^l\otimes t^{m-i-l}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{l=0}^{m-i} t^i\otimes t^l\otimes t^{m-i-l}\end{aligned}$$

eşitliği oluşur. Önce aşağıya sonra sağa doğru gidilen yol ile

$$\begin{aligned}(\triangle\otimes id)\left(\sum_{i=0}^{m} t^i\otimes t^{m-i}\right) &= \sum_{i=0}^{m}\triangle\left(t^i\right)\otimes t^{m-i}\\ &= \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{i} t^j\otimes t^{i-j}\right)\otimes t^{m-i}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Birinci eşitlikte $i=j$ ve $l=i-j$ dönüşümleri yapılırsa

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=j}^{m} t^j\otimes t^{i-j}\otimes t^{m-i}$$

elde edilir ve iki eşitlik birbirine eşit olur. Kobirleşme özelliği vardır.

K2. Kobirim Özelliği:

$$\varepsilon\left(t^i\right)=\begin{cases}0 & ,\ her\ i\geq 1\\ 1 & ,\ i=0\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan kobirim işlemine göre

$$\begin{array}{ccccc} G & \overset{\varepsilon\otimes id}{\leftarrow} & G\otimes G & \overset{id\otimes\varepsilon}{\rightarrow} & G\\ & \searrow & \uparrow\triangle & \swarrow & \\ & & G & & \end{array}$$

ifadesi için

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{i=0}^{m} 1\otimes t^{m-i} & \overset{\varepsilon\otimes id}{\leftarrow} & \sum_{i=0}^{m} t^i\otimes t^{m-i} & \overset{id\otimes\varepsilon}{\longmapsto} & \sum_{i=0}^{m} t^i\otimes 1\\ & \searrow & \uparrow\triangle & \swarrow & \\ & & t^m & & \end{array}$$

eşitliğinde $(id\otimes\varepsilon)\triangle$ işlemi için $id\otimes\varepsilon=t^m$ ve $(\varepsilon\otimes id)\triangle$ işlemi için $\varepsilon\otimes id=t^m$ elde edilir.

Kobirim mevcuttur.

3.1.9 Örnek

$A = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ sonlu kümesini alalım. Kümenin elemanlarını harflar olarak tanımlarsak, kümenin kendisine alfabe deriz. Bu alfabe üzerine kurulmuş kombinatör sınıfı W harflerin yan yana sıralanması ile elde edilen sonlu kelimelerden oluşur. Yani

$$W := \{\emptyset, l_1, l_2, \ldots l_n, l_1 l_1, l_1 l_2, \ldots, l_1 l_n, \ldots l_{i_1} \ldots l_{i_k}, \ldots\}$$

olur. Bu kümedeki bir kelimenin uzunluğu bu kelimedeki harflerin sayısı ile tanımlanır. $\emptyset$ uzunluğu 0 olan kelimedir. Dolayısıyla $l_{i_1} \ldots l_{i_k}$ kelimesinin uzunluğu k'dır çünkü k tane harften oluşur. $|l_{i_1} \ldots l_{i_k}| := k$ olacaktır.

Örnek olarak $A = \{a, b, c\}$ ise $W = \{\emptyset, a, b, c, aa, ab, \ldots\}$ şeklinde olacaktır.

W sınıfı üzerinde birleşme ve çözümleme işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Birleşme işlemini $\circ$ ile tanımlayalım ve kelime dizilerini birbirine bağlarken diziliş sıraları bozulmadan ardaşık bir sıra izleyelim. Yani $l_{i_1} \ldots l_{i_m} \circ l_{j_1} \ldots l_{j_n} = l_{i_1} \ldots l_{i_m} l_{j_1} \ldots l_{j_n}$ olur. Bu işlem uzunluğun korunması şartını sağlamış olacaktır. $|m| \circ |n| = |m+n|$ olur. Bu tanımla $(W, \circ)$ A tarafından üretilen bir monaid oluşturur. Bir yapının monoid oluşturması için birleşme ve birim eleman özelliklerini sağlaması gerekir.

M1. Birleşme Özelliği

$$\begin{aligned}
(l_{i_1} \ldots l_{i_m} \circ l_{j_1} \ldots l_{j_n}) \circ l_{k_1} \ldots l_{k_s} &= l_{i_1} \ldots l_{i_m} l_{j_1} \ldots l_{j_n} \circ l_{k_1} \ldots l_{k_s} \\
&= l_{i_1} \ldots l_{i_m} l_{j_1} \ldots l_{j_n} l_{k_1} \ldots l_{k_s} \\
&= l_{i_1} \ldots l_{i_m} \circ (l_{j_1} \ldots l_{j_n} l_{k_1} \ldots l_{k_s}) \\
&= l_{i_1} \ldots l_{i_m} \circ (l_{j_1} \ldots l_{j_n} \circ l_{k_1} \ldots l_{k_s})
\end{aligned}$$

olur. Birleşme özelliği vardır.

M2. Birim Elemen Özelliği: Birim elemanı $\emptyset$'dir.

$$\begin{aligned}
\emptyset \circ l_{i_1} \ldots l_{i_m} &= l_{i_1} \ldots l_{i_m} \\
&= l_{i_1} \ldots l_{i_m} \circ \emptyset
\end{aligned}$$

olur.

Örneğimiz için harflerdeki çözümlemeyi özel olarak $\langle l_i \rangle := \{(\emptyset, l_i), (l_i, \emptyset)\}$ şeklinde tanımlayalım. Bunu W'nin tüm elemanlarına uygularsak, bir kelimenin çözümlenmesi, çözümlemenin bir parçası olan bir alt kelimenin seçimi ve geri kalan alt kelime ile çözümlemenin diğer parçası oluşturulur. Burada önemli olan diziliş sırasının korunmasıdır. Yani bir kelime iki alt kelimeye

$$\langle l_{i_1}\dots l_{i_k}\rangle := \biguplus_{j_1\leqslant\dots\leq j_m ve\; j_{m+1}\leqslant\dots\leq j_k}\left\{(l_{i_{j_1}}\dots l_{i_{j_m}}, l_{i_{j_{m+1}}}\dots l_{i_k})\right\}$$

şeklinde parçalanır, burada $\{1,\dots,k\}$'nın permütasyonları $\{j_1,\dots,j_k\}$'yı oluşturacaktır. Bu çözümleme işlemini kocebirde coçarpma olarak tanımlayalım (bazen kesip çıkarma koçarpması da denir). Alt kelime burada alt dizi olarak düşünülebilir. Bu birleştirme ve çözümleme kuralları uzunluğu koruyacaktır.

Şu halde bir cebir ve kocebir inşaa etmek istersek

Cebir inşaası

$\mu : \circ :\ W\otimes W \longrightarrow W$ lineer dönüşümü

$$l_{i_1}\dots l_{i_m}\circ l_{j_1}\dots l_{j_n} = l_{i_1}\dots l_{i_m} l_{j_1}\dots l_{j_n}$$

operasyonu ile bir cebirdir.

Kocebir inşaası

$\triangle :\ W \longrightarrow W\otimes W$ lineer dönüşümü

$$\triangle(l_{i_1}\dots l_{i_k}) = \sum_{j_1\leqslant\dots\leq j_m ve\; j_{m+1}\leqslant\dots\leq j_k} l_{i_{j_1}}\dots l_{i_{j_m}}\otimes l_{i_{j_{m+1}}}\dots l_{i_k}$$

ve $\varepsilon :\ W \longrightarrow k$ lineer dönüşümü$u\in W$ için

$$\varepsilon(u) = \begin{cases} 1 & , u = \emptyset \\ 0 & , u = l_{i_1}\dots l_{i_k}\end{cases}$$

operasyonları ile bir kocebirdir.

Özel olarak örneğimizde $A=\{x\}$ alırsak, kelimeler $P=\left\{\emptyset, x, x^2,\dots\right\}$ olacaktır ve oluşan cebir yapısı polinom cebri olarak adlandırılır. Bir polinom cebri için cebir ve kocebir yapısı aşağıdaki gibidir.

Cebir yapısı için $\mu :\ P\otimes P \longrightarrow P$ lineer dönüşümü $\mu(x^i, x^j) = x^{i+j}$ operasyonu ile tanımlanır.

Kocebir yapısı için $\triangle :\ P \longrightarrow P\otimes P$ operasyonu

$$\triangle(x^n) = \sum_{i=0}^{n} C(n,i)\, x^i\otimes x^{n-i}$$

ve $\varepsilon : W \longrightarrow k$ operasyonu, $u \in W$ için

$$\varepsilon(u) = \begin{cases} 0 & , u = x^n \\ 1 & , u = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

3.1.10 Sweedler-Einstein Notasyonu [10, 1.2]

C bir kocebir ve her $c \in C$ için $\triangle(c) = \sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ ifadesine Sveedler-Einstein Notasyonu denir. İşlemin bir kocebir oluşturabilmesi için kobirleşme ve kobirim eleman özelliklerinin tanımlanması gerekir. Dolayısıyla

$$\begin{array}{ccc} C & \overset{\triangle}{\rightarrow} & C \otimes C \\ \triangle \downarrow & & \downarrow_{id \otimes \triangle} \\ C \otimes C & \underset{\triangle \otimes id}{\rightarrow} & C \otimes C \otimes C \end{array}$$

ifadesini elemanlar bazında ele alırsak

$$\begin{array}{ccc} c & \overset{\triangle}{\rightarrow} & c_{(1)} \otimes c_{(2)} \\ \triangle \downarrow & & \downarrow_{id \otimes \triangle} \\ c_{(1)} \otimes c_{(2)} & \underset{\triangle \otimes id}{\rightarrow} & ? \end{array}$$

İlk sağa sonra aşağıya doğru olan adım ile ilk aşağıya sonra sağa doğru olan adımların birbirine eşit olması gerekir. Yani

$$c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}$$

eşitliğini sağlaması gerekir. Bu toplam $c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$ şeklinde gösterilir. Dolayısıyla bu eşitlik gereklidir.

Cobirim için $\triangle(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ ve ε fonksiyonunu birinci elemanlar üzerine uygularsak $\varepsilon\left(c_{(1)}\right) \otimes c_{(2)} = c$ ve ε'nu ikinci elemanlar üzerine uygularsak $c_{(1)} \otimes \varepsilon\left(c_{(2)}\right) = c$ olur. ε fonksiyonunun kobirim olması için bu iki ifade birbirine eşit olmalıdır.

3.1.11 Önerme

Eğer C bir kocebir ve R bir cebir ise o zaman $Hom_k(C,R)$, k-lineer bir cebirdir.

İspat: $Hom_k(C,R)$ üzerine $\star$ adında bir ikili işlem tanımlayalım.

$$(f\star g)(c) = f\left(c_{(1)}\right)g\left(c_{(2)}\right)$$

Birim eleman özelliği: Birim elemanı $\varepsilon\cdot 1_R$ dir. Çünkü $f\in Hom_k(C,R)$ için

$$\begin{aligned}((\varepsilon\cdot 1_R)\star f)(c) &= (\varepsilon\cdot 1_R)\left(c_{(1)}\right)\cdot f\left(c_{(2)}\right)\\ &= \varepsilon\left(c_{(1)}\right)f\left(c_{(2)}\right)\\ &= f\left(\varepsilon\left(c_{(1)}\right)\cdot c_{(2)}\right)\\ &= f(c)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca benzer şekilde

$$\begin{aligned}(f\star(\varepsilon\cdot 1_R))(c) &= f\left(c_{(1)}\cdot\varepsilon\left(c_{(2)}\right)\right)\\ &= f(c)\end{aligned}$$

olacaktır. İki ifadenin eşitliğinden dolayı birim eleman vardır.

Birleşme özelliği: $f,g,h\in Hom_k(C,R)$ olsun.

$(f\star g)\star h = f\star(g\star h)$ eşitliği mevcut mudur?

$$\begin{aligned}(f\star g)\star h(c) &= (f\star g)\left(c_{(1)}\right)\cdot h\left(c_{(2)}\right)\\ &= \left(f\left(c_{(1)(1)}\right)\cdot g\left(c_{(1)(2)}\right)\right)\cdot h\left(c_{(2)}\right)\\ &= f\left(c_{(1)}\right)\cdot g(c_{(2)(1)})\cdot h(c_{(2)(2)})\\ &= f\star(g\star h)\end{aligned}$$

bulunur. Birleşme özelliği vardır.

$Hom_k(C,R)$, k-lineer bir cebirdir. $\square$

3.1.12 Hatırlatma

U bir cebir olsun. $A\subseteq U$ olacak şekilde A'da U cebrindeki işlemlere göre bir cebir tanımlanıyorsa A cebrine U cebrinin bir alt cebri denir.

U bir cebir olsun. I, U cebirinin bir alt cebiri ve $IU\subseteq I$ ve $UI\subseteq I$ ise I altcebirine U'nun bir ideali denir. Bu durumda her ideal bir altcebirdir. Ayrıca cebirlerde bir ideali tensör çarpımı ile ifade edersek $\mu: I\otimes U + U\otimes I \longrightarrow I$ $(\star)$ olacaktır. Şimdi bu tanımı kullanarak koideal ve koaltcebir tanımlarını yapabiliriz.

3.1.13 Tanım [10, sayfa 24]

C bir kocebir olsun. I'nın C kocebirinin bir koideali olması için

1I. $I \subseteq C$ olur; yani I, C kocebirinin alt vektör uzayı

2I. $\triangle(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$

şartlarını sağlaması gerekir. $\triangle(I)$'nın $\triangle(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ şeklinde çalışmasının nedeni cebirlerde ideallerin $(\star)$ şeklinde çalışmasıdır.

C bir kocebir olsun. B'nin C'nin alt kocebiri olması için $B \subseteq C$ yani $\triangle(B) \subseteq B \otimes B$ ve C'nin işlemleri altında B'nin kapalı olması yeterlidir. [10, 1.4.2]

Bu durumda bütün alt kocebirler koidealdir.

3.1.14 Örnek

1. 3.1.5 örneğinde ele alınan $V = k\{X\}$ vektör uzayı $\triangle(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ koçarpmasında her $x \in k\{X\}$ için koideal elde ederiz ancak alt kocebir değildir.

2. 3.1.6 örneğindeki $C = k\{a, D, 1\}$ değişmesiz kocebir sisteminde, C'nin koidelleri $0, k\{1\}, k\{a\}, k\{1,a\}, k\{1,D\}, k\{a,D\}, k\{1,a,D\}$ olur. Sistemin alt kocebirleri $0, k\{1\}, k\{a\}, k\{1,a\}, k\{1,a,D\}$ olacaktır.

3. 3.1.8 Örneğinde ele alınan $\triangle : k\{G\} \to k\{G\} \otimes k\{G\}$ şeklinde tanımlanan $\triangle(t^m) = \sum_{i=0}^{m} t^i \otimes t^{m-i}$ ve $g = t^m$ fonksiyonu ve

$$\varepsilon\left(t^i\right) = \begin{cases} 0 & , \, her \; i \geq 1 \\ 1 & , \, i = 0 \end{cases}$$

olan fonksiyon G ile gerilen vektör uzayı $C = k\{G\}$ üzerinde bir kocebir tanımlar. Burada $C^{\leq n} = k\left\{t^1, t^2, \ldots, t^n\right\}$ bir alt kocebirdir, dolayısıyla bir koidealdir. Çünkü

$$\triangle(t^n) = \sum_{i=0}^{n} t^i \otimes t^{n-i} \in C^{\leq n} \otimes C^{\leq n}$$

olacaktır.

$C^{tek} = \left\{t^{2n+1} : n \geq 0\right\}$ kümesi için

$$\triangle(t^{2n+1}) \triangle(t^{2n+1}) = \sum_{i=0}^{2n+1} t^i \otimes t^{2n+1-i} \subseteq C^{tek} \otimes C + C \otimes C^{tek}$$

olacaktır, bir koidealdir ancak bir alt kocebir değildir.

$C_{\c{c}ift} = \left\{t^{2n} : n \geq 0\right\}$ kümesi için

$$\triangle(t^{2n}) = \sum_{i=0}^{2n} t^i \otimes t^{2n-i} \nsubseteq C_{\c{c}ift} \otimes C + C \otimes C_{\c{c}ift}$$

olduğu için koideal ve alt kocebir değildir.

3.1.15 Tanım

k bir cisim ve C, k-üzerine bir kocebir olsun. M bir k-vektör uzayı olmak üzere $\rho : M \longrightarrow M \otimes C$ işlemi aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa

1. $(id \otimes \triangle) \circ \rho = (\rho \circ id) \circ \rho$
2. $(id \otimes \varepsilon) \circ \rho = id$

C, k-üzerine bir komodüldür denir. Burada $\triangle$ koçarpma ve ε kobirim işlemleridir.

3.1.16 Hatırlatma

Artan Zincir Koşulu (ACC): R bir halka ve M bir R-modül olsun. M'nin sonlu alt modüllerinin her artan zinciri $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ bir zaman sonra sabitleniyorsa yani bir $N \in \mathbb{N}$ ve her $n \geqslant \mathbb{N}$ için $M_n = M_N$ oluyarsa M modülü artan zincir koşulunu sağlanmış olur. Bu durumda M bir R-modül olmak üzere, M modülü noetheryan olur eğer her alt modülleri ailesi artan zincir koşulunu sağlıyorsa. Yani her $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ için öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geqslant \mathbb{N}$ için $M_n = M_N$ olur.

Azalan Zincir Koşulu (Descending Chain Condition (DDC)): R bir halka ve M bir R-modül olmak üzere M'nin sonlu alt modüllerinin her azalan zinciri $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ bir zaman sonra sabitleniyorsa yani bir $N \in \mathbb{N}$ ve her $n \geqslant \mathbb{N}$ için $M_n = M_N$ oluyarsa M modülü azalan zincir koşulunu sağlanmış olur. M bir R-modül olmak üzere M modülü artinyan olur, eğer her alt modülleri ailesi azalan zincir koşulunu sağlıyorsa. Yani her $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ azalan zinciri için $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i = M_N$ eşitliği bir $N \in \mathbb{N}$ için sağlanıyorsa veya bir $N \in \mathbb{N}$ ve her $n \geqslant \mathbb{N}$ için $M_n = M_N$ oluyorsa M modülüne artinyandır denir.

3.1.17 Tanım ve Önerme

C kocebir ve $\mathcal{F}$, C'nin boştan farklı koideallerinin kümesi olsun. $\mathcal{F}$ üzerine $\approx$ denklik bağıntısını şu şekilde tanımlayalım; X, A, C komodülünün alt komodülleri olmak üzere $X \approx A$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\alpha : X \rightarrow A$ bağıntısının bir C-komodül izomorfizması olmasıdır. Bu durumda $P = \mathcal{F}/\approx$ kümesi $\mathcal{F}$ kümesi üzerindeki $\approx$ bağıntısının denklik sınıfları olsun. P kümesi üzerinde yeni bir bağıntı tanımlayalım. P kümesi üzerinde $[X] \vdash [Y]$ bağıntısı olabilmesi için gerek ve yeter koşul bir $A \in [X]$ ve bir $B \in [Y]$ için $\beta : A \to B$ epimorfizmasının olmasıdır.

3.1.18 Önerme

P kümesi üzerinde oluşturulan $\vdash$ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

İspat: $[X] \vdash [X]$ ise $\beta : A \to A$ için $[X] = [X]$ olur. $\vdash$ bağıntısının yansıma özelliği vardır.

$[X] \vdash [Y]$ ve $[Y] \vdash [X]$ ise $\beta : A \to B$ ve $dimA \geq dimB$ ve $\beta' : B' \to A'$ ve $dimB' \geq dimA'$ olur. B ve B' aynı denklik sınıfına ait oldukları için yani $B, B' \in [Y]$ olduğu için $dimB = dimB'$ olacaktır. Ancak $\beta : A \to B$ epimorfizma ve $dimA = dimB$ olduğu için β bir izomorfizma olur. $[X] = [Y]$ dir. $\vdash$ bağıntısının ters simetri özelliği vardır.

$[X] \vdash [Y]$ ve $[Y] \vdash [Z]$ olsun. Bir $A \in [X]$, bir $B, B' \in [Y]$ ve bir $C \in [Z]$ için $\beta : A \to B$ ve $\beta' : B' \to C$ epimorfizmaları vardır. $B, B' \in [Y]$ olduğu için bir $\alpha : B \longrightarrow B'$ izomorfizması bulabiliriz öyle ki $\beta' \circ \alpha \circ \beta : A \longrightarrow B \longrightarrow B' \longrightarrow C$ epimorfizma olur. $[X] \vdash [Z]$ olur. $\vdash$ bağıntısı geçişme özelliğini sağlar.

3.1.19 Açıklama

Kocebirlerde, koideller arasında epimorfizma ile oluşturulan sıralama bağıntısı için koidellerin dualini aldığımızda 2.1.30 teoreminden dolayı cebirlerlerde ideller arasında oluşturulan monomorfizmaya denk gelir. Yani $P = \mathcal{F}/\approx$ kümesi üzerinde oluşturulan $\vdash$ sıralama bağıntısı için $\beta : A \longrightarrow B$ epimorfizma ise $B^{\vee}, A^{\vee}$ idealleri arasında $\beta^{\vee} : B^{\vee} \longrightarrow A^{\vee}$ monomorfizması vardır. Ancak burada sıralamanın yönünün değiştiğine dikkat edilmelidir.

3.1.20 Tanım

P kümesi üzerinde bir artan zincir $[X_0] \vdash [X_1] \vdash \ldots \vdash [X_n] \vdash [X_{n+1}] \ldots$ şeklinde tanımlanır. Bir kocebirin noetheryan olabilmesi için $[X_0] \vdash [X_1] \vdash \ldots \vdash [X_n] \vdash [X_{n+1}] \ldots$ şeklindeki bütün zincirlerin bir zaman sonra sabitlenmesi gerekir.

P kümesi üzerinde bir azalan zincir $\ldots \vdash [X_n] \vdash [X_{n-1}] \vdash \ldots \vdash [X_1] \vdash [X_0]$ şeklinde tanımlanır. Bir kocebirin artinyan olabilmesi için $\ldots \vdash [X_n] \vdash [X_{n-1}] \vdash \ldots \vdash [X_1] \vdash [X_0]$ şeklindeki bütün zincirlerin bir zaman sonra sabitlenmesi gerekir.

3.1.21 Açıklama

2.1.14 açıklamasına göre noetheryan kocebirlerin dualini aldığımızda artinyan cebirlere gidecektir. Bu arada sormanız gereken soru şu olur: " Noerheryan kocebirler ile artinyan cebirler arasında bire bir ilişki var mıdır? Çünkü atinyan cebirler, noetherhan kocebirlerden daha fazla olabilir!” Noerheryan kocebirler ile artinyan cebirler arasında böyle bir denklik vardır. Çünkü $(V^{\vee})^{\vee} = V$ olduğu için bir kocebirlerin dualinin dualini aldığımızda ilk kocebire izomorftur. Dolayısıyla noetheryan kocebirler arasında epimorfizma ile oluşturulan sıralama bağıntısı, kocebirlerin dulalini aldığımızda artinyan cebirler arasında oluşturulan monomorfizma ile denk olurlar. Ancak yönler değişecektir. Ancak bütün bu çalışmaların cebirlerin sonlu boyutlu olduğu sürece geçeli olduğunu unutmayalım.

3.2 HOPKİNS-LEVİTSKİ TEOREMİ

Her noetheryan kocebir aynı zamanda artinyandır.

İspat: Cebirlerden kocebirlere dualite ile geçebiliyoruz ve herhangi bir vektör uzayı V için $(V^{\vee})^{\vee} = V$ olduğundan kocebirler üzerinde yapılacak noetheryan ve artinyan araştırmalar cebirler üzerine taşınabilir. Burada önemli olan nokta eğer $\beta : V \to W$ bir vektör uzayı epimorfizması ise $\beta^{\vee} : W^{\vee} \to V^{\vee}$ bir monomorfizma olur. Bu demektir ki bir kocebir üzerindeki artan yada azalan bir zincir duali alındığında artan yada azalan bir zincire dönüşür ancak yönler tersine döner. Yani bir noetheryan kocebir alalım. Duali artinyan bir cebir olacaktır (azalan ve artan zincir yönünün değiştiğini unutmayalım). Nedeni artan ve azalan zincirlerin yönlerinin tersine dönmesidir. Benzer açıklama artinyan kocebirler için de geçerlidir. Yani artinyan bir kocebir alalım. Duali noetheryan bir cebir olacaktır. Şimdi cebirler için geçerli olan ve 2.6 teoreminde ispatladığımız Hopkins-Levitzki teoremini kullanabiliriz.

Noetheryan bir kocebir alalım. Dualinin artinyan olduğunu söyleyebiliriz. Hopkins-Levitski teoremine göre artinyan bir cebir aynı zamanda noetheryandır ve bu cebirin tekrar dualini alırsak çıkacak olan kocebir artinyan olacaktır. Açıklama 2.1.19'dan dolayı kocebir orjinal kocebire izomorftur. Demek ki her noerheryan kocebir aynı zamanda artinyandır.

Not: Bizim değişmeli cebirler için ispatladığımız Hopkins-Levitzki teoremi değişmeli olmayan cebirler için de geçerlidir [8, 4.15]. Dolayısıyla değişmesiz kocebirler için de teoremimiz geçerli olacaktır.

4 SONUÇ

Bu tezde sonlu boyutlu kocebirler için Hopkins-Levitski Teoremini ispat ettik. Tezin kullandığı yöntemler kategori teoriye ait olup, problemin kocebirsel bir yapıdan cebirsel bir yapıya taşınması fikri üzerine kuruludur. Kocebirsel yapılar konusunda Türkçe matematik literatüründe benzer bir çalışma olmadığı için kocebirsel yapının oluşumu, örnekleri ve kocebirlerle ilgili temel sonuçlar detaylı olarak ele alınmış ve çözülmüştür. Bu şekli ile tezin gelecekte kocebirler konusunda araştırma yapacak matematikçilere bir referans olmasını istedik.

Sonlu boyutlu kocebirler üzerine ispatlanan Hopkins-Levitski Teoremi kocebirleri daha iyi tanımamıza yardım etmiştir. Ancak sonsuz boyutlu vektör uzayları veya kocebirler için Hopkins-Levitski Teoremi ispatlanabilir mi? Bu sorunun cevabı farklı bir yaklaşım gerektirmektedir. İspatı yapmak için kullandığımız, kocebirsel yapıları cebirsel yapılara çevirip, çözümü bulduktan sonra ardından tekrar kocebirsel yapılara dönüştürme yöntemi, sonsuz boyutlu kocebirler için mümkün olmamaktadır. Sonsuz boyutlu kocebirler, cebirsel yapılara çevrilebilir yine ispat yapılabilir ancak boyutsal problemler yüzünden kocebirsel yapıya geri dönüştürülmesinde sorun oluşacaktır. Bu problemin çözümü yeni bir araştırmanın başlangıcı olacaktır. Bir sonraki araştırmamız bu soru üzerine yoğunlaşacak ve sonsuz boyutlu vektör uzaylarında kocebirsel yapılar ele alınacaktır.

KAYNAKÇA

Kitaplar

1. Ağargün G. & Aygör N., 2002. *Soyut Cebir Cilt 2.* Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi.

2. Atiyah M. & F.Macdonald I.G., 1969. *İntroduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Company.

3. Bilhan M. & Güloğlu İ. & Koç C., 1991. *Soyut cebir.* Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Matematik Lisans.

4. Çallıalp F. & Tekir Ü., 2009. *Değişmeli halkalar ve modüller.* Birsen Yayın Evi.

5. Dummit D.S., & Foote R.M., 2004. *Abstract algebra.* Wiley Press.

6. Grillet P.A., 2000. *Abstract algebra.* Springer -Verlag Press.

7. Hacısalihoğlu H., 1996. *Lineer cebir*. Bilim Yayınları, Ankara.

8. Lam T. Y., 1991. *A first course in non commutative rings.* Springer-Verlag Press.

9. Northcott D.G., 1984. *Multilinear algebra.* Cambrige University Press.

10. Sweedler M.E., 1969. *Hopf algebras.* W. A. Benjamin, İnc.

11. Taşçı, D., 2007. *Soyut cebir.* Alp Yayınevi.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayşe Deniz GÖZEN

Sürekli Adresi : Zuhuratbaba Mah. Yavuzevler Mektep Sok. No:18/7 Bakırköy İstanbul

Doğum Yeri ve Yılı : Bingöl 05.05.1977

Yabancı Dili : İngilizce

İlk Öğretim : Basınköy İ.Ö.O. 1988

Orta Öğretim : Ataköy Lisesi 1994

Lisans : Yıldız Teknik Ünv.1998

Enstitü Adı : Fen Bilimleri Ens.

Program Adı : Matematik Yüksek Lisans Programı

Çalışma Hayatı :
Milli Eğitim Bakanlığı Lise Öğretmeni (2004-…)
Mef Dersaneleri Öğretmeni (2001-2003)
Dış Bank Eminönü Şubesi Cari İşlemler Memuru (1998-1999)