

T.C.

BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYGULAMALI MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

**BEYİN TÜMÖRLERİNİN MATEMATİKSEL
MODELLENMESİ ve ANALİZİ**

Yüksek Lisans Tezi

Reyhan TELLİOĞLU

Tez Danışmanı : Yard. Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU

İSTANBUL, 2011

T.C.
BAHÇEŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü
Uygulamalı Matematik Yüksek Lisans Programı

Tezin Başlığı : Beyin Tümörlerinin Matematiksel Modellenmesi ve Analizi
Öğrencinin Adı Soyadı : Reyhan TELLİOĞLU
Tez Savunma Tarihi : 10/06/2011

Bu yüksek lisans tezi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanmıştır.

Yard. Doç. Dr. Tunç BOZBURA
Enstitü Müdürü

Bu tez tarafımızca okunmuş, nitelik ve içerik açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak yeterli görülmüş ve kabul edilmiştir.

Tez Sınav Jürisi Üyeleri :

Yard. Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU :

Doç. Dr. Canan ÇELİK KARAASLANLI :

Yard. Doç. Dr. Levent EREN :

TEŐEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren kıymetli hocam Yard. Doç. Dr. Ersin ÖZUĞURLU 'ya , eğitim hayatımda önemli bir yeri ve etkisi olan meslektaőım ablam Züleyha ÖZTEL 'e, sabrını ve bilgisini esirgemeyen Bayram BALEKOğLU 'na, her zaman maddi ve manevi desteğiyle beni yalnız bırakmayan aileme teőekkürü bir borç bilirim.

İstanbul, 2011

Reyhan TELLİOğLU

ÖZET

BEYİN TÜMÖRLERİNİN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ ve ANALİZİ

Tellioğlu, Reyhan

Uygulamalı Matematik Yüksek Lisans Programı
Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Ersin Özuğurlu

Haziran, 2011, 90 sayfa

Bu çalışmada, beyin tümörlerinin matematiksel modellenmesine neden ihtiyaç duyulduğu, modellenmenin nasıl yapılacağı, oluşan modelin çözüm ve analizinin nasıl yapılabileceğinin açıklanması amaçlanmıştır.

Tezin ilk bölümünde tümör, tümörün çeşitleri, beyin tümörü, teşhis yöntemlerinin ne olduğu bilgileri aktarılmıştır.

Beyin tümörünün büyümesi problemini 1-boyutlu sınır değer problemi olarak ele alıp, yaklaşık çözümü sonlu farklar metotları ve ortaya çıkan lineer olmayan denklem sistemleri de Newton-Raphson metodu ile çözülmüştür. Sonlu fark metotlarından Açık İleri Euler, Kapalı Geri Euler ve Crank-Nicolson Metodu kullanılmıştır. Model, lineer ve lineer olmayan iki durum için incelenmiştir.

Lineer durum için, Fourier dönüşümleri yardımıyla kararlılık koşulu Von Neumann analizi yardımıyla yapılmıştır. Tam çözümü bilinen bir denklem için, bu metotlar kullanılarak hata mukayesesi yapılmış ve grafikleri çizilmiştir. Lineer olmayan durum için yukarıda adı geçen sonlu fark metotları uygulanıp sayısal çözümler elde edilip grafikleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel Modelleme, Sonlu Fark Metotları, Von Neumann Analizi, Euler Metodu, Crank-Nicolson Metodu.

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODELLING OF BRAIN TUMORS and ANALYSIS

Tellioğlu, Reyhan

Graduate Program of Applied Mathematic

Supervisor: Assistant Professor Ersin Özuğurlu

June, 2011, 90 pages

This research presents the reasons behind the need for the mathematical modeling of brain tumors and the implementation way of the studied models. The solution and analysis of the models studied are also intended to explain.

The information about tumors, types of tumor, brain tumor and the diagnostic method for tumors are discussed in the first part of dissertation.

The growth in brain tumor is examined as a one-dimensional boundary value problem and the finite difference methods such as explicit forward Euler method, implicit backward Euler method and Crank-Nicolson method are used for approximate solution. For the non-linear problem, after applying these finite difference schemes, we obtain a system of non-linear equations and these were solved by the Newton-Raphson method. The models are analyzed for linear and non-linear cases.

For the linear case, the Fourier transforms are used for the stability condition in the Von Neumann analysis.

For the non-linear case, the same process is made for all three finite difference models mentioned above, and the solution graphs are drawn as well. In error comparison, the linear part of the problem is considered since the exact solution is known. The corresponding solution graphs are drawn.

Keywords: Mathematical Model, Finite Difference Methods, Von Neumann Analysis, Euler Method, Crank-Nicolson Method.

İÇİNDEKİLER

TABLolar.....	vi
ŞEKİLLER.....	vii
KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. MATEMATİKSEL MODELLEME	3
2.1 MODELİN ELDE EDİLMESİ	5
2.2 BOYUTSUZLAŞTIRMA	8
3. SONLU FARK METODU (SFM)	10
3.1 YAKINSAKLIK, TUTARLILIK ve KARARLILIK	11
3.2 SFM ANALİZİ	15
3.2.1 Fourier Analizi	15
3.2.2 Fourier Analizi ve Kısmi Diferansiyel Denklemler	17
3.2.3 Von Neumann Analizi	18
3.3 SFM MERTEBE BELİRLENMESİ	22
4. SFM ÖRNEKLERİ ve KARARLILIK.....	24
4.1 LİNEER DURUM	27
4.1.1 Açık İleri Euler Metodu.....	27
4.1.2 Kapalı Geri Euler Metodu.....	34
4.1.3 Crank-Nicolson Metodu	38
4.2 LİNEER OLMAYAN DURUM	42
4.2.1 Açık İleri Euler Metodu	42
4.2.2 Kapalı Geri Euler Metodu	47
4.2.3 Crank-Nicolson Metodu	52
4.2.4 Crank-Nicolson Metodu ile Oluşan Lineer Olmayan Denklem Sisteminin Sayısal Çözüm	57
5. LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	59
5.1 NEWTON-RAPHSON METODU	59
5.1.1 Newton-Raphson Algoritması.....	62
6. TARTIŞMA	65
7. SONUÇ	67
KAYNAKÇA	68
EKLER	70
EK A.1	71

TABLULAR

Tablo 4.1 : Sonlu fark formülleri.....	26
Tablo 4.2 : Yüksek mertebeden sonlu fark formülleri.....	26
Tablo 6.1 : Maksimum Hata.....	65

ŞEKİLLER

- Şekil 4.1 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.4$ için hata grafiği (AİEM).....28
- Şekil 4.2 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{25}$ ve $\lambda = 0.625$ için hata grafiği (AİEM).....29
- Şekil 4.3 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{25}$ ve $\lambda = 0.625$ için yakınlaştırılmış hata grafiği (AİEM)30
- Şekil 4.4 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{25}$ ve $\lambda = 0.625$ için çözüm grafiği (AİEM).....31
- Şekil 4.5 : $\Delta t = \frac{0.1}{77}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.5208$ için hata grafiği (AİEM).....32
- Şekil 4.6 : $\Delta t = \frac{0.1}{77}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.5208$ için çözüm grafiği (AİEM).....33
- Şekil 4.7 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.4$ için hata grafiği (KGEM).....35
- Şekil 4.8 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\lambda = 0.4$ ve $\lambda = 0.625$ için hata grafiği (KGEM).....36
- Şekil 4.9 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.4$ için çözüm grafiği (KGEM).....37
- Şekil 4.10 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\lambda = 0.625$ için çözüm grafiği (CNM).....39
- Şekil 4.11 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.4$ için çözüm grafiği (CNM).....40
- Şekil 4.12 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{25}$ ve $\lambda = 0.625$ için çözüm grafiği (CNM).....41
- Şekil 4.13 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 0.006$ için çözüm grafiği (AİEM).....43
- Şekil 4.14 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 100$ için çözüm grafiği (AİEM).....44
- Şekil 4.15 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 250$ için çözüm grafiği (AİEM).....45

Şekil 4.16 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 500$ için çözüm grafiği (AIEM).....	46
Şekil 4.17 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 0.006$ için çözüm grafiği (KGEM).....	48
Şekil 4.18 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 100$ için çözüm grafiği (KGEM).....	49
Şekil 4.19 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 250$ için çözüm grafiği (KGEM).....	50
Şekil 4.20 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 500$ için çözüm grafiği (KGEM).....	51
Şekil 4.21 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 0.006$ için çözüm grafiği (CNM).....	53
Şekil 4.22 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 100$ için çözüm grafiği (CNM).....	54
Şekil 4.23 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 250$ için çözüm grafiği (CNM).....	55
Şekil 4.24 : $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 500$ için çözüm grafiği (CNM).....	56

KISALTMALAR

Açık İleri Euler Metodu	:	AIEM
Crank-Nicolson Metodu	:	CNM
Glyom Hücreleri	:	GH
Kapalı Geri Euler Metodu	:	KGEM
Sonlu Fark Metodu	:	SFM

1 GİRİŞ

Tümör; hücrenin kontrol edilemeyen bir şekilde büyümesi ve çoğalması sonucu meydana gelen oluşuma verilen isimdir; iyi huylu ve kötü huylu olmak üzere ikiye ayrılır. İyi huylu tümörler, oluştukları bölge ile sınırlıdırlar ve başka bölgelere yayılmazlar. Kötü huylu tümörler ise; oluştukları bölgede büyürler ve başka dokulara da yayılabilirler. Kötü huylu tümörlerin diğer bir ismi de **kanser**dir. Kanserli tümörler bir veya birden fazla hücre mutasyonu meydana getirir ve genellikle hızlı kontrol edilemeyen büyüme geçirir. Böylece normal doku fonksiyonu bozulur (Murray 2003, p.538).

Vücudun birçok yerinde tümörler oluşmaktadır. Bu çalışmada sadece beyin tümörlerinin kontrolsüz bir şekilde yayılıp, çoğalması incelenecektir. Beyin tümörleri; dört evreden oluşmaktadır. Dördüncü ve en kötü evre olan **gliyomlar**, tümörlerin en ölümcül olanıdır. Beyin kanserlerinin %50 den fazlasını gliyomlar oluşturur (Roniotis *et al.* 2010, pp.501-508). Gliyomlar yüksek derecede yayılımcı ve dokuyu çevreleyip içine sızan tümörlerdir. Bu tümörlerin teşhisi için Bilgisayarlı Beyin Tomografisi(BBT), Magnetik Rezonans Görüntüleme(MRG), biyopsi gibi yöntemler kullanılır. Gliyomanın teşhisinden sonra tedavi gereklidir.

'*Gliyomların nasıl yayıldığı problemi*' tedavi için teşhis ile ortaya çıkan önemli sorunlardandır. Bunun anlamı, görüntülenen tümörün ötesinde hücredeki yayılmadır ve yayılma görüntüleme teknikleri ile farkedilemeyebilir. Bundan dolayı araştırmacılar, gliyomların büyümesini anlamaya odaklandılar (Roniotis *et al.* 2010, pp.501-508).

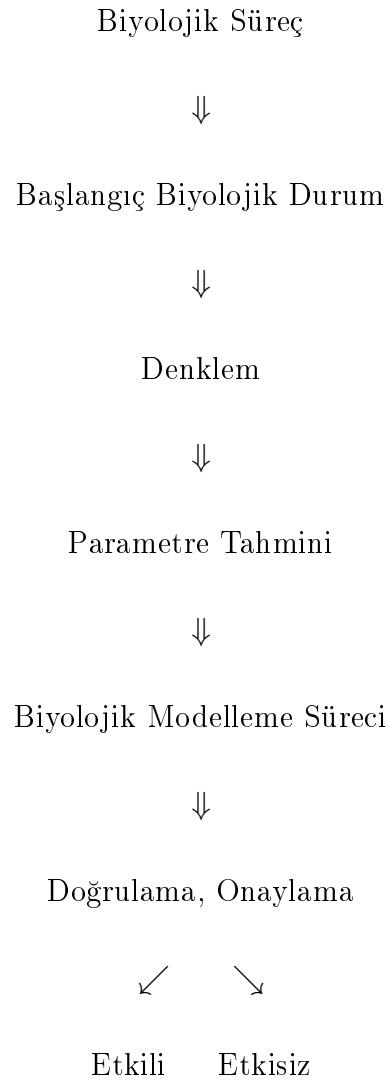
Tümör büyüme modelleri, gliyom çalışmalarında yeni ortaya çıkan bir çalışma alanı oldu. Araştırmacılar, matematiksel modeller bulmak ve bu modeller ile gliyom büyüme prosedürünü açıklamak için çalıştılar (Roniotis *et al.* 2010, pp.501-508).

Matematiksel modeller, gelişen süreç ve hastalıkları analiz ederken, karmaşık olan yapıyı anlamak için kullanılır (Swanson *et al.* 2002, pp.14-18). Optimum tedavi yöntemini bulmak için modellemeler yapılmaktadır.

Bu çalışmada, diferansiyel denklemleri kullanarak hücrenin yoğunluğunun değişim miktarı, hücredeki büyüme ve hücredeki yayılma ile açıklanacaktır. Matematiksel modelin nasıl oluşturulacağı ve kullanılan parametrelerin ne anlama geldiği ifade edilecektir. Oluşan modelin çözümü için, sonlu fark metotlarından ileri fark, geri fark ve merkezi fark formülleri kullanılacaktır. Kullanılan metodlar için kararlılık, yakınsaklık ve tutarlılık tanımları yapılacaktır. Model, lineer ve lineer olmayan iki durum için de incelenecektir. Lineer olduğu durumda Fourier analizi ve Von Neumann analizlerine yer verilecektir. Lineer olan durumda tam çözümü bilinen bir örnek için, Açık İleri Euler Metodu, Kapalı Geri Euler Metodu ve Crank-Nicolson Metodu ile yaklaşık çözümler bulunarak maksimum hata hesaplanacaktır. Lineer olmayan durumda ise aynı metodlar kullanılarak, bir parametre tanımlanacak ve bu parametrenin farklı değerleri için çözüm grafikleri çizdirilecektir.

2 MATEMATİKSEL MODELLEME

Matematiksel model, bir sistemi açıklamak için kullanılan matematiksel dildir. Gliyom durumunda ise, bilimsel araştırmalar altında gliyomların nasıl büyüdüğü bir matematiksel tanımlamadır. İlk gliyom büyüme modeli, Murray 'ın modeli olarak bilinen bir yayının modelidir. Murray bu modeli 1989 yılında ortaya koymuştur (Murray 1989). Murray' ın yayının modelini sistematik bir şekilde ifade edersek:



Tepki-yayınım denklemini çözebilmek için sayısal yöntemler kullanılır. Çünkü çözüm için direk bir formül yoktur. Model ilk olarak gerçek biyolojik süreç ile başlar. Başlangıçtaki biyolojik durum anlaşılıp, ayrıştırılır. Bunun anlamı, bu adımlar ve gerçek biyolojik parametreler izole edilir. Bir mekanizmanın ayrıştırılması için bu gereklidir. Bu adımlar ve parametreler simulasyon yapılabilir. Özellikle, bu mekanizma bir denklem ile tanımlanabilir. Sonraki adım ise bu matematiksel model ile çalışmaktır. Gerçek başlangıç ve sınır koşulları da modele dahil edilir. Teorik sonuçları elde ettikten sonra önemli olan biyolojik sürece geri dönüp, deneyler için teoriye bağlı tahminlere, yorumlara, önerilere bakılıp ya modelden emin olunur ya da model çürütülür. Bu aşamada, model süreci teorinin ve deneyin birleştirilmesine bağlıdır (Roniotis *et al.* 2010, pp. 501-508).

1995 yılında Tracqui, hücre konsantrasyonunun gelişimi üzerine çalıştı ve tümörün büyümesinin iki parametresini kullandı: çoğalma ve yayılım (Tracqui 1995).

2000 yılına kadar, araştırmacılar beyin anatomisini hesaba katmadılar. Halbuki, beyin maddeleri çok önemlidir. Çünkü yayılım beyaz ve gri maddede farklılık göstermektedir. Beyaz maddede yayılım gri maddeden daha hızlıdır. Bu nedenle, gliyom modelleri beyin heterojen olan yapısını hesaba katmalıdır. 2000 yılında Swanson, problemde değişiklik yapmış ve yayılım katsayısına beyaz ve gri maddeyi de dahil etmiştir (Swanson 2000). 2005 yılında, Jbabdi *et al.* yayılım modellemelerinde beyin doku eşyönsüzlük (anisotropy) başlattı (Jbabdi *et al.* 2005). Buna göre, gliyom hücre yayılımı beyaz madde liflerinin yönü boyunca kolaylaştırılmıştır (Beilen *et al.* 1999; Giese *et al.* 2003). Bu gözlemler yayılım tensör magnetik rezons görüntüleme ile desteklenebilir.

Literatürde beyin gliyomlarının büyümesinin modellenmesi için tepki-yayınım tümör büyüme modelleri kullanılmaktadır. Son zamanlarda, literatürde kabul edilen ve oldukça ilgi gören

makroskobik özellikle anatomik ve yayılım görüntüleri vasıtasıyla modellerin spesifik bir tipi, tepki-yayılım modelleri, gliyom büyüme modelleri ile medikal görüntüler arasında bağlantı kurmak için girişimde bulundular (Tracqui 1995, Swanson 2000, Clatz 2005, Jbabdi 2005, Hoge 2007, Mandonnet 2008). Bu son tarihlerdeki modeller, özellikle anatomik ve yayılım görüntüleri vasıtasıyla, medikal görüntülerden gelen bilgileri birleştirir. Bu birleştirme, matematiksel modellerin klinik uygulamaları transferinde çok önemlidir. Medikal görüntüler teşhis ve klinik rutinde hasta takibi için kullanılır (Konukoğlu *et al.* 2009).

2.1 MODELİN ELDE EDİLMESİ

1-boyutta modelin nasıl oluştuğuna bakmak için: $c(x, t)$; hücrenin t zamanında ve x konumundaki yoğunluğu olsun, burada $t \in [0, \infty)$ ve $x \in \mathfrak{R}$ olsun. Hücrenin yayılımı ve çoğalmasına 1-boyutta bakılacağı için, hücre ya sağa doğru ya da sola doğru yayılım gösterecektir. Bu nedenle, sola veya sağa yayılım olasılıkları λ_l ve λ_r olsun. λ_l ile hücrenin sola doğru Δx kadar yer değiştirme olasılığı ve λ_r ile hücrenin sağa doğru Δx kadar yer değiştirme olasılığı gösterilsin, böylece $0 \leq \lambda_r + \lambda_l \leq 1$.

Δt zaman adım uzunluğunda, hücrenin yoğunluğunu t zamanında ve x konumunda şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}
 c(t, x) = (1 - \lambda_r - \lambda_l)c(t - \Delta t, x) &+ \lambda_l c(t - \Delta t, x + \Delta x) \\
 &+ \lambda_r c(t - \Delta t, x - \Delta x)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

eşitliğin sağ tarafında, ilk terim hücre yoğunluğunun x konumunda kalma oranını, ikinci terim hücre yoğunluğunun sola doğru ($x + \Delta x$ 'den x 'e) yer değiştirme oranı ve son terim ise hücre yoğunluğunun sağa doğru ($x - \Delta x$ 'den x 'e) yer değiştirme oranıdır. Eğer bu durum tarafsız ise sağa

ve sola doğru yer değiştirme olasılıkları eşittir. Böylece, $\lambda_l = \lambda_r = \frac{1}{2}$. Eşitlik yeniden yazılırsa;

$$c(t, x) = \frac{1}{2}c(t - \Delta t, x + \Delta x) + \frac{1}{2}c(t - \Delta t, x - \Delta x) \quad (2.2)$$

eşitliğin her iki tarafından $c(t - \Delta t, x)$ çıkartılıp, Δt ' ye bölünürse;

$$\frac{c(t, x) - c(t - \Delta t, x)}{\Delta t} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \left[\frac{c(t - \Delta t, x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} - 2c(t - \Delta t, x) + c(t - \Delta t, x - \Delta x) \right] \frac{1}{(\Delta x)^2} \quad (2.3)$$

eşitliğin sol tarafında sonlu bir fark denklemini görölmektedir ve bu denklem $\frac{\partial c}{\partial t}$ ile ifade edilebilir. Aynı şekilde sağ taraf da $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ ile ifade edilebilir. Bölüm 3' de sonlu fark denklemleri ile ilgili detaylı bilgi yer almaktadır. D yayılım katsayısı olsun. Eğer $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ ve $\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \rightarrow D$ ise denklemin son hali şu şekildedir :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

Çoğalma parametresi için denkleme $\rho c(1 - c)$ ifadesini de eklenirse;

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \rho c(1 - c) \quad (2.5)$$

elde edilir (Allen 2007, pp.309-310).

Beyin yarıkürelerinin iç kısmında, iki madde vardır. Bunlar gri madde ve beyaz maddedir. Gri madde, beynin kabuk bölgesinde ve yarıkürenin içinde bazı bölgelerde yer alan çekirdeklerde bulunur. Gri madde bölgeleri, sinir hücrelerinin gövdelerini içeren mielinsiz alanlardır. Beyaz madde ise beyin yarıkürelerinin geri kalan alanlarını kaplar. Tümör hücrelerinin yayılımı beyaz maddede ve gri maddede farklılık göstermektedir.

Beyin tümörlerinin yayılmasını tanımlamak için iki parametre kullanılmaktadır: çoğalma ve yayılım. Burada yayılım olarak kullanılan

parametre, tümör hücrelerinin aktif olarak hareket etmesi anlamına gelir. Önceki modellerde görülmüştür ki, hayatta kalmayı belirlemede yayılım parametresi çoğalma parametresinden daha önemlidir.

Beyin tümörünün büyümesi problemini aşağıda ifadesi verilen 1–boyutlu sınır değer problemi olarak ele alıp, yaklaşık çözümü sonlu farklar metodları ve ortaya çıkan lineer olmayan denklem sistemleri de Newton-Raphson metodu ile çözülecektir. Problemin denklemi ve çözüm bölgesi aşağıda verilmektedir:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}c(x, t)}_{\text{GH kons. değişim oranı}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\frac{\partial c}{\partial x}\right)}_{\text{GH net yayılımı}} + \underbrace{\rho c(1 - c)}_{\text{GH net çoğalma}} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} c(0, t) &= B_1 \quad 0 < t < T \\ c(a, t) &= B_2, \quad 0 < t < T \\ c(0, x) &= f(x), \quad 0 < x < a \end{aligned} \quad (2.7)$$

burada GH , glioma hücrelerinin kısaltılmışını, $c(x, t)$, x konumunda ve t zamanındaki hücrelerin sayısını; $D(x)$, hücrelerin yayılım katsayısını; ρ , hücrelerin net çoğalma oranını göstermektedir. Bu denklem 1–boyutlu *parabolik* tipten bir kısmi diferansiyel denklemdir. Burada B_1 ve B_2 , uç noktadaki hücre sayısını gösterir. f fonksiyonu, $x = 0$ dan $x = a$ noktasına kadar başlangıç hücre sayısının dağılımı olarak düşünülebilir. Eğer f fonksiyonu $[0, a]$ kapalı aralığında sürekli ise (2.6) sınır değer probleminin çözümü tektir (Çağlıyan ve Çelebi 2010).

Yayılım katsayısı olan $D(x)$, beyaz ve gri maddede farklı olduğundan beyaz maddede D_w , gri maddede D_g şeklinde yazılabilir. Bu çalışmada problem 1–boyutta incelenecektir.

Problemin 2–boyuttaki denklemleri şöyle verilmektedir:

$$\frac{\partial}{\partial t}c(\vec{x}, t) = \nabla \cdot (D(\vec{x})\nabla c) + \rho c(1 - c) \quad (2.8)$$

burada

$$D(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{l} D_b : \vec{x} \text{ beyaz bölgede} \\ D_g : \vec{x} \text{ gri bölgede} \end{array} \right\}$$

Sınır koşulu

$$\vec{n} \cdot (D(\vec{x}) \nabla c) = 0 \quad \vec{x} \in \partial\Omega \subset R^2 \quad (2.9)$$

ve başlangıç koşulu

$$c(0, \vec{x}) = f(\vec{x}) \quad (2.10)$$

2.2 BOYUTSUZLAŞTIRMA

Sistemdeki etkili parametre sayısını azaltmak için boyutsuzlaştırma yapılır.

1-boyutta incelenecek (2.6) denklemini boyutsuzlaştırmak için:

$$\hat{x} = \frac{x}{a}, \quad \hat{t} = \rho t$$

olsun. $0 < x < a$ iken $0 < \hat{x} < 1$. Bu takdirde yeni değişkenler ile yeni \hat{c} ve \hat{f} tanımlanır:

$$\hat{c}(\hat{x}, \hat{t}) = c(x, t), \quad \hat{f}(\hat{x}) = f(x)$$

Zincir kuralından ,

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial t} = \rho \frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{t}} \\ c_x &= \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{x}} \\ c_{xx} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial \hat{x}^2} \end{aligned}$$

denklemden

$$c_t = D c_{xx} + \rho c(1 - c) \quad \Rightarrow$$

yerine konulursa;

$$\rho \frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{t}} = \frac{D}{a^2} \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial \hat{x}^2} + \rho \hat{c}(1 - \hat{c}), \quad 0 < \hat{x} < 1$$

denklemini elde edilir. Eğer $D^* = \frac{D}{\rho a^2}$ seçilirse,

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{t}} = D^* \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial \hat{x}^2} + \hat{c}(1 - \hat{c}), \quad 0 < \hat{x} < 1$$

Başlangıç ve sınır koşulları da yeniden yazılarak

$$\hat{c}(\hat{x}, 0) = \hat{f}(\hat{x}), \quad 0 < \hat{x} < 1$$

$$\hat{c}(1, \hat{t}) = B_1, \quad \hat{t} > 0$$

$$\hat{c}(0, \hat{t}) = B_2, \quad \hat{t} > 0$$

elde edilir. Problemin genelliği bozmadan $D^* = 1$ alınır. (Rockne 2009)

3 SONLU FARK METODU (SFM)

Sonlu fark metodlarına (x, t) düzleminde ağ noktalarını tanımlayarak başlanacaktır. h ve k pozitif sayılar olsun, bu takdirde ağ noktası keyfi n ve m tamsayıları için $(x_m, t_n) = (mh, nk)$ olup, aynı zamanda x -ekseni üzerindeki adım uzunluğu $h = \Delta x$ ve zaman adım uzunluğu $k = \Delta t$ olarak anlaşılacaktır. Ağ üzerinde tanımlı bir v fonksiyonu için (x_m, t_n) ağ noktasındaki değerini v_m^n ile gösterilecektir. Benzer şekilde (x, t) 'ye göre sürekli olan bir u fonksiyonunun da (x_m, t_n) ağ noktasındaki değerini u_m^n ile gösterilecektir. Sabit bir n değeri için (x_m, t_n) noktalar kümesine n . ağ düzeyi denilecektir. Bu çalışmada küçük h ve k değerlerine sahip ağlarla ilgilenilecektir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}c(x_i, t_n) &= c_i^n \\c(x_i, t_n + \Delta t) &= c_i^{n+1} \\c(x_i + \Delta x, t_n) &= c_{i+1}^n \\c(x_i - \Delta x, t_n) &= c_{i-1}^n\end{aligned}\tag{3.1}$$

Sonlu fark denklemlerindeki temel fikir türev ifadesini sonlu farklarla ifade edebilmektir. Bu bir çok şekilde yapılabilir; örneğin

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(mh, nk) &\approx \frac{u(mh, (n+1)k) - u(mh, nk)}{k} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(mh, nk) &\approx \frac{u(mh, (n+1)k) - u(mh, (n-1)k)}{2k}\end{aligned}$$

Bu ifadelerin geçerli olduğu şu formüllerden de görülebilir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \epsilon) - u(x, t)}{\epsilon} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \epsilon) - u(x, t - \epsilon)}{2\epsilon}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Benzer ifadeler u fonksiyonunun x e göre türevleri için de yazılabilir.

1. mertebeden hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin en basit hali

1–boyutlu dalga denklemdir:

$$u_t + au_x = 0 \quad (3.3)$$

Yukarıdaki yaklaşımlar kullanılarak (3.3) dalga denklemi için aşağıdaki beş farklı sonlu fark denklemi elde edilir:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{1}{2}(v_m^{n+1} + v_m^{n-1})}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (3.8)$$

(3.4) algoritması ileri-zaman (forward-time) ileri-uzay (forward-space) olarak adlandırılır çünkü hem zamana hem de uzay değişkenine göre ileri-fark formülü kullanılmıştır. Benzer şekilde (3.5) ve (3.6) sırasıyla ileri-zaman geri-uzay (backward-space) ve ileri-zaman merkezi-uzay (central-space) olarak adlandırılırlar. (3.7) algoritması kurbağa usulü zıplamaya benzer ağ noktalarını temsil ettiği için, "leapfrog" olarak adlandırılır ve (3.8) algoritması da *Lax-Friedrichs* olarak anılır.

3.1 YAKINSAKLIK, TUTARLILIK ve KARARLILIK

Diferansiyel denklemlerin sonlu farklar yöntemi ile çözümünü vermeden önce *yakınsaklık*, *kararlılık* ve *tutarlılık* ifadelerinin tanımları verilecektir (Strikwerda 1989, pp. 1-53).

TANIM 3.1 Yakınsaklık: *Kısmi diferansiyel denklemi yaklaşık olarak ifade eden bir adımlı sonlu fark algoritmasının yakınsak olması ile diferansiyel denklemin çözümü $u(x, t)$ ve sonlu fark denkleminin çözümü v_m^n ise*

$$v_m^0 \approx u_0(x) \quad mh \rightarrow x$$

$$v_m^n \approx u(x, t) \quad (mh, nk) \rightarrow (x, t), \quad (h, k) \rightarrow 0$$

olarak algulanır.

Bu tanım, v_m^n ifadesinin yakınsaklığından ne anladığımızı tam olarak açıklayamamaktadır. Çünkü v_m^n ağ üzerinde tanımlı olmasına karşılık $u(x, t)$ ifadesi (x, t) 'ye göre sürekli olan bir ifadeyi temsil etmektedir, yani biri ayrık diğeri sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla yakınsaklık ifadesini biraz daha açmadan önce tutarlılık kavramı verilir.

TANIM 3.2 Tutarlılık: *Bir kısmi lineer diferansiyel denklemi $Pu = f$ ve sonlu fark denklemi olarak da $P_{h,k}v = f$ verilmiş olsun. Sonlu fark denkleminin verilen kısmi diferansiyel denklem ile **tutarlı** olması için her mertebeden türevi sürekli bir $\phi(x, t)$ fonksiyonu için $h, k \rightarrow 0$ iken*

$$P\phi - P_{h,k}\phi \rightarrow 0$$

olmasını anlaşılmaktadır. Burada her ağ noktasında olan noktasal yakınsaklıktan bahsedilmektedir.

Sonlu fark denkleminin kararlılığından bahsetmeden önce şu belirtilmelidir ki eğer bir sonlu fark algoritması yakınsak ise v_m^n ifadesi $u(x, t)$ 'ye yakınsar, bu ise v_m^n ifadesinin sınırlı olması durumunda bir anlam ifade eder. Bu sınırlılık büyük önem taşır.

Örnek 1: İleri-zaman İleri-uzay sonlu fark denklemi

Bir yönlü dalga denklemini (3.3) ele alınırsa, bu denklem için P operatörü $\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}$ dir, öyle ki

$$P\phi = \phi_t + a\phi_x.$$

Bu denkleme (3.4) ileri-zaman ileri-uzay sonlu fark metodu uygulanırsa;

$P_{h,k}$ operatörü

$$P_{h,k}\phi = \frac{\phi_m^{n+1} - \phi_m^n}{k} + a \frac{\phi_{m+1}^n - \phi_m^n}{h}$$

şeklinde verilir ve

$$\phi_m^n = \phi(mh, nk).$$

Tutarlılığı göstermek için $\phi(x, t)$ fonksiyonunun (x_m, t_n) civarında Taylor serisine açılır.

$$\begin{aligned} \phi_m^{n+1} &= \phi_m^n + k\phi_t + \frac{1}{2}k^2\phi_{tt} + O(k^3) \\ \phi_{m+1}^n &= \phi_m^n + h\phi_x + \frac{1}{2}h^2\phi_{xx} + O(h^3) \end{aligned} \quad (3.9)$$

burada eşitliğin sağ tarafındaki türev ifadeleri (x_m, t_n) noktasında hesap edilir, öyle ki

$$P_{h,k}\phi = \phi_t + a\phi_x + \frac{1}{2}k\phi_{tt} + \frac{1}{2}ah\phi_{xx} + O(h^2) + O(k^2).$$

Bundan dolayı $(h, k) \rightarrow 0$ iken

$$\begin{aligned} P\phi - P_{h,k}\phi &= -\left(\frac{1}{2}k\phi_{tt} + \frac{1}{2}ah\phi_{xx}\right) + O(h^2) + O(k^2) \\ &\rightarrow 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Böylece seçilen sonlu fark metodunun "tutarlı" olduğu görüldü. Başka bir deyişle sonlu fark yaklaşım denklemlerinin verilen diferansiyel denklemle tutarlı olması için kesme hatası teriminin $\Delta t \rightarrow 0$ ve $\Delta x \rightarrow 0$ iken sıfıra gitmesi gerekir.

Tutarlılığı analiz ederken büyük O ve küçük o terimlerinin kullanılması yukarıdaki örnekten de görüleceği üzere işlemleri kolaylaştırmaktadır. Genelde, eğer F ve G fonksiyonları α ya bağlı fonksiyonlar iseler α 'nın bütün küçük değerleri ve sabit K değeri için,

$$\left| \frac{F}{G} \right| \leq K$$

şartı altında $\alpha \rightarrow 0$ iken

$$F = O(G)$$

şeklinde yazılacaktır. Benzer şekilde, eğer F/G ifadesi $\alpha \rightarrow 0$ iken sıfıra yaklaşıyorsa, $\alpha \rightarrow 0$ iken

$$F = O(G)$$

şeklinde yazılacaktır. Özellikle, bir büyüklüğe küçük h değerleri için h^r nin sabit bir terimle çarpımı olarak yazılabiliyor ve sınırlı kalıyorsa, $O(h^r)$ sınıfındandır denilecektir. Bir büyüklük belirtilmeyen oranda sıfıra yakınsıyorsa bu takdirde $o(1)$ dir.

Tutarlılık yakınsaklık için gerek bir koşuldur ancak bazı sonlu fark denklemleri tutarlı olmalarına karşılık yakınsak değildirler (Strikwerda 1989).

TANIM 3.3 Kararlılık: $P_{h,k}v_m^n = 0$ sonlu fark denkleminin bir kararlılık bölgesi Λ olsun. Bir birinci mertebeden homojen kısmi diferansiyel denklem eğer $\exists J \in \mathbb{Z}$ ve $h_0, k_0 > 0 \ni \forall T > 0 \exists C_T \ni$

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 \leq C_T h \sum_{j=0}^J \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^j|^2 \quad (3.11)$$

$0 \leq nk \leq T$ ve $(h, k) \in \Lambda$ şartlarını sağlarsa Λ üzerinde kararlıdır denir. Sonlu fark denklemleri için kararlılık kavramı kısmi diferansiyel denklemlerde başlangıç değer problemlerinin iyi-konumlanmış olması ile yakından ilgilidir. Bu bir tanımla daha açık bir hale getirilsin.

TANIM 3.4 İyi-konumlanmış problem: Bir birinci mertebeden $Pu = 0$ homojen kısmi diferansiyel denklemin $\forall T \geq 0$ için $u(x, t)$ çözümü $\exists C_T$ öyle ki

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx \leq C_T \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, 0)|^2 dx, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.12)$$

eşitsizliğini sağlıyor ise denkleme iyi-konumlanmışdır denir.

TEOREM 3.1 Lax-Richtmyer Denklik Teoremi *Başlangıç değer problemi iyi-konumlanmış olarak verilen bir kısmi diferansiyel denklem için tutarlı bir sonlu fark denklemi yakınsaktır ancak ve ancak bu sonlu fark denklemi kararlıdır.*

3.2 SFM ANALİZİ

3.2.1 Fourier Analizi

Kararlılık ve iyi-konumlanmış konularını çalışırken en iyi araç Fourier analizidir. Fourier analizini hem reel ekseninde hem de tam sayılar ağı kümesinde, başka bir deyişle $hZ = \{hm : m \in Z\}$ üzerinde kullanacağız. Reel eksen üzerinde tanımlı bir $u(x)$ fonksiyonu için, Fourier dönüşümünü $\hat{u}(w)$ ile gösterip şöyle tanımlanır:

$$\hat{u}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} u(x) dx \quad (3.13)$$

u nun Fourier dönüşümü w reel değişkenine bağlı bir fonksiyondur ve sadece u ile belirlenir. u hakkındaki bazı bilgiler \hat{u} 'den de elde edilebilir. Örneğin, \hat{u} nun büyük w değerleri için değişim oranının azalması u fonksiyonunun kaç kere türetilbileceği ile yakından ilgilidir.

Ters Fourier formülü,

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \hat{u}(w) dw \quad (3.14)$$

ile verilir ve bu eşitlik u 'nun \hat{u} ile nasıl elde edilebileceğini gösterir. Ters Fourier formülü u fonksiyonunun e^{iwx} ile temsil edilen dalgaların bir üst üste ekleme prensibi olarak farklı $\hat{u}(w)$ genlikleri ile ifade edilebilmesine olanak sağlar. Burada $u(x)$ reel bir fonksiyon olsa bile, $\hat{u}(w)$ kompleks bir fonksiyon olabilir. Benzer şekilde, eğer v bütün m tam sayı değerleri için tanımlı bir ağı fonksiyonu ise, v nin Fourier dönüşümü

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} v_m \quad (3.15)$$

ile verilir, burada $\xi \in [-\pi, \pi]$ ve $\hat{v}(-\pi) = \hat{v}(\pi)$. Ters Fourier formülü

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\xi} \hat{v}(\xi) d\xi \quad (3.16)$$

ile verilir.

Sonlu fark denklemlerini çalışırken v_m ağ fonksiyonları ile başlamak ve (3.16) formülünü ağ fonksiyonunu temsil eden bir denklem gibi görmek doğal bir adımdır.

Eğer ağ noktaları arasındaki adım uzunluğu h ise, değişken dönüşümü ile (3.15) formülü yerine

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h e^{-imh\xi} v_m \quad (3.17)$$

yazılabilir, burada $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$ ve ters Fourier formülü de

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \hat{v}(\xi) d\xi \quad (3.18)$$

dir, u fonksiyonunun L^2 normu

$$\|u\|_2^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx \right) ,$$

$\hat{u}(w)$ fonksiyonunun L^2 normu ile aynı olup, başka bir deyişle

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(w)|^2 dw \quad (3.19)$$

dir. Ayrıca, ayrık dönüşümler için de L^2 normunu şöyle tanımlanır:

$$\|\hat{v}\|_h^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m|^2 h = \|v\|_h^2 \quad (3.20)$$

(3.19) ve (3.20) eşitlikleri *Parseval* eşitliği olarak bilinir. Bu konuda daha ayrıntılı bilgiyi Titchmarsh (1965) ve Goldberg (1965) de bulabiliriz. Parseval' in eşitliği kararlılık çalışmalarında yoğun olarak kullanılmaktadır,

ayrıca ağ fonksiyonunun dönüşümü için (3.12) tanımında verilen kararlılık eşitsizlikleri yerine ona denk olan

$$\|\hat{v}^n\|_h \leq C_T^* \sum_{j=0}^J \|\hat{v}^j\|_h \quad (3.21)$$

ayrık dönüşüm eşitsizliğini verir.

3.2.2 Fourier Analizi ve Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bu bölüm kısmi diferansiyel denklemlerini çalışmak için Fourier analizini bir araç olarak kullanarak sonlandırılacaktır. Bir sonraki bölümde de sonlu fark denklemlerinin kararlılığını çalışmak için benzer araçlar kullanılacaktır. Eğer (3.14) ters Fourier formülünün türevi alınırsa

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} iw \hat{u}(w) dw$$

ve (3.13) Fourier dönüşümünü kullanarak

$$\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right)(w) = iw \hat{u}(w) \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22) eşitliği Fourier dönüşümünün gerçek gücünü göstermektedir; başka bir deyişle, dönüşüm altında türev operatörü çarpım operatörüne dönüşür.

(3.22) eşitliğinin önemli bir sonucu da $u(x)$ fonksiyonunun r . mertebeden L^2 anlamında integralinin olabilmesi gerek ve yeter şartını Parseval eşitliği yardımıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |w|^2)^r |\hat{u}(w)|^2 dw < \infty \quad (3.23)$$

şeklinde verileceğini ifade etmesidir.

H^r fonksiyonlar uzayını r nin her negative olmayan değeri için $L^2(\mathbb{R})$ uzayındaki fonksiyonların kümesi olarak tanımlanır ve fonksiyonlar uzayındaki normu da

$$\|u\|_{H^r} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |w|^2)^r |\hat{u}(w)|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

olacak şekilde tanımlanır. H^0 üzerindeki norm ile L^2 normunun aynı olduğu gözlemlenir. Ayrıca $\|D^r u\|$ normu da

$$\begin{aligned}\|D^r u\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^r}{\partial x^r} u(x) \right|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |w|^{2r} |\hat{u}(w)|^2 dw\end{aligned}$$

şeklini alır, burada x üzerindeki integral sadece r tam sayı iken tanımlıdır, fakat $\|D^r u\|$ normunu tanımlayan 2. integral r tam sayı olmasa da tanımlıdır. Şimdi Fourier analizini 1- boyuttaki dalga denklemine (3.33) uygulansın. Dönüşüm sadece uzay değişkenine uygulayarak başlansın. Bu takdirde $\hat{u}(w, t)$ için

$$\hat{u}_t = -iaw\hat{u} \quad (3.24)$$

denklemini elde edilir ki bu da t ye göre adi diferansiyel denklemdir. Başlangıç verisi kullanılarak bu denklem kolayca çözülür ve çözümü

$$\hat{u}(w, t) = e^{-iawt} \hat{u}_0(w)$$

şeklinde yazılır. Parseval eşitliğini ve $|e^{-iawt}| = 1$ olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(w, t)|^2 dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iawt} \hat{u}_0(w)|^2 dw = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(w)|^2 dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|^2 dx\end{aligned} \quad (3.25)$$

olduğunu elde edilir. Bu da gösteriyor ki (3.33) denklemi için verilen başlangıç değer problemi iyi-konumlanmıştır. (3.25) metodu daha genel kısmi diferansiyel denklemlerinin sonuçlarını ispatlamak için kullanılabilir.

3.2.3 Von Neumann Analizi

Fourier analizinin önemli bir uygulaması sonlu fark metodlarının kararlılığının von Neumann analiz yöntemidir. Fourier analizi yardımıyla sonlu fark metodlarının kararlılığı için gerek ve yeter koşulları bulunabilir.

Özel bir örnek olarak bunun nasıl uygulandığı görülebilir. 1. mertebeden lineer homojen kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılacak 1-boyutlu dalga denklemi ele alınsın.

$$u_t + au_x = 0.$$

Bu denklemi ileri-zaman ve geri-uzay sonlu fark denklemi olarak yazılırsa:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0 \quad (3.26)$$

burada $h = \Delta x$ ve $k = \Delta t$ için kullanılmıştır, bu denklem düzenlenirse şu hali alır:

$$v_m^{n+1} = (1 - a\lambda)v_m^n + a\lambda v_{m-1}^n \quad (3.27)$$

burada $\lambda = k/h$. v^n için (3.18) ters Fourier formülünü kullanılırsa,

$$v_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \hat{v}^n(\xi) d\xi$$

ve bu ifadeyi (3.27) de v_m^n ve v_{m-1}^n terimleri için yerine koyulursa,

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} [(1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}] \hat{v}^n(\xi) d\xi \quad (3.28)$$

Bu ifade ters Fourier formülü ile karşılaştırılırsa

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \hat{v}^{n+1}(\xi) d\xi$$

ve Fourier dönüşümünün tek olduğu gerçeğini kullanılırsa, (3.28) ifadesinin integrandının ters formüldeki integrand ile aynı olduğu sonucu çıkarılır. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \hat{v}^{n+1}(\xi) &= [(1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}] \hat{v}^n(\xi) \\ &= g(h\xi) \hat{v}^n(\xi) \end{aligned} \quad (3.29)$$

burada

$$g(h\xi) = (1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}.$$

(3.29) formülü gösteriyor ki algoritmada bir zaman adımı ilerlemek, çözüm fonksiyonunun Fourier dönüşümünü *genlik faktörü* $g(h\xi)$ ile çarpmaya

denktir. Genlik faktörü olarak adlandırılmasının sebebi de çözümün bir zaman adımında ilerlemesi $\hat{v}^n(\xi)$ çözümündeki her bir frekansın aynı büyüklükte büyümesi ile ilişkilidir. (3.29) denkleminde önemli bir formül elde edilir:

$$\hat{v}^n(\xi) = [g(h\xi)]^n \hat{v}^0(\xi) \quad (3.30)$$

Bu formülde \hat{v} üzerindeki n zaman adımını gösterirken $g(h\xi)$ üzerindeki n ise kuvveti göstermektedir. Fourier dönüşümü yardımıyla her bir-adım metodu (3.30) şekline dönüştürülebilir.

(3.30) ifadesini kullanılarak sonlu fark algoritmalarının kararlılığını ve doğruluk derecesini incelemek için kullanılacaktır. Özellikle $g(h\xi)$ genlik faktörü kullanılan algoritma ile ilgili çok bilgi içermektedir.

Şimdi (3.30) formülünü kullanarak (3.26) ile verilen algoritmanın kararlılığını analiz edilecektir. Bu analiz kısmi diferansiyel denklemlerde başlangıç değer problemlerinin iyi-konumlanmış olup olmadığının analizi ile benzerlik gösterir. Parseval eşitliğini, (3.20), ve (3.30) ifadelerini kullanarak,

$$\begin{aligned} h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 &= \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |g(h\xi)|^{2n} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı (3.11) kararlılık eşitsizliği, $J = 0$ halinde, eğer $|g(h\xi)|^{2n}$ sınırlı ise sağlanır. $\|g(h\xi)\|^{2n} \leq 1$ iken

$$\begin{aligned} h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^n|^2 &\leq \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi \\ &= h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m^0|^2 \quad . \end{aligned}$$

TEOREM 3.2 *Sabit katsayılı 1–adımlı sonlu fark denklemleri bir kararlılık bölgesi Λ 'da kararlıdır denilecektir ancak ve ancak $\exists K$ sabiti ($\theta = h\xi$, k , ve h değerlerinden bağımsız) ve $\exists k_0, h_0$ pozitif ağı aralıkları öyle ki $\forall \theta$, $0 < k \leq k_0$, ve $0 < h \leq h_0$ için*

$$|g(\theta, k, h)| \leq 1 + Kk \quad (3.31)$$

ise. Eğer $g(\theta, k, h)$, h ve k dan bağımsız ise, bu takdirde (3.31) kararlılık koşulu şu hali alır

$$|g(\theta, k, h)| \leq 1 \quad (3.32)$$

Bu teorem sonlu fark algoritmasının kararlılığını belirlemek için sadece $g(h\xi)$ genlik faktörünü göz önüne alınması gerektiğini gösteriyor. Bu analiz, von Neumann tarafından ortaya atıldığı için *von Neumann analizi* olarak adlandırılır.

Von Neuman analizini yapmak için (3.18) integrallerini açıkça yazılmasına gerek yoktur, sadece v_m^n ifadesini algoritmada her n ve m için $g^n e^{im\theta}$ ile yer değiştirilmesi yeterli olacaktır. Elde edilen denklemden genlik faktörü çözülür. Yalnız şuna dikkat edilmeli ki, burada $v_m^n = g^n e^{im\theta}$ demekle sadece v_m^n ifadesinin şeklinin ‘bu formda’ olduğunu söylemeye çalışılmaktadır.

Tabii ki bir diferansiyel denklem için birçok algoritma verildikten sonra en önemli soru hangi algoritma hangi problem için daha uygun olduğu sorusudur. Özellikle problemin fiziksel yapısına bağlı olacak şekilde $\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ifadesini sayısal olarak ele alırken, örneğin (3.3) dalga denkleminde a dalganın hızını göstermektedir ve a ile λ arasındaki ilişki bazı sonlu fark denklemlerinde çözümün yakınsayıp yakınsamadığını gösterir. Özellikle dalga denkleminde

$$\frac{a}{\Delta t} \leq 1$$

eşitsizliği **Courant kararlılık koşulu** olarak bilinir. Burada a dalganın ilerleme hızını gösterirken $\Delta x/\Delta t$ sonlu fark denkleminin ilerleme hızını göstermektedir. Bundan dolayı şu söylenebilir ki sayısal yöntemimizin hızı orijinal dalga denkleminin hızından büyük olmak zorundadır. Bu da sayısal hesaplamalarda

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a}$$

koşulunu getirir, başka bir deyişle Δt çok büyük olamaz, aksi takdirde yaklaşım metodu kararsız olur. Bu **yeter bir şarttır ancak gerek bir koşul değildir.**

3.3 SFM MERTEBE BELİRLENMESİ

Sonlu fark algoritmalarında bir yöntemi diğer bir yöntemle kıyaslama kriteri metodların mertebesi ile belirlenir. Önce sonlu farklarda mertebede için bir örnek verilecek, sonra da tanımı verilecektir.

Örnek 2: 1-boyutta verilen dalga denklemini gözönüne alalım.

$$u_t + au_x = f \quad (3.33)$$

burada $u = u(x, t)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ve $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$. (3.33) ile verilen kısmi diferansiyel denklemini sonlu farklar denklemi olarak yazabilmek için *Crank-Nicolson* formülasyonu kullanılacaktır. Bunun için $(x, t + 1/2\Delta t)$ noktası civarında u_t değerini şu şekilde hesaplanır:

$$u_t = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad . \quad (3.34)$$

Benzer şekilde aşağıdaki eşitlik de kullanılır:

$$\begin{aligned}
u_x(x, t + 1/2\Delta t) &= \frac{u_x(x, t + \Delta t) + u_x(x, t)}{2} + O(\Delta t^2) \\
&= 1/2 \left[\frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x - \Delta x, t + \Delta t)}{2\Delta x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} \right] \\
&\quad + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \quad . \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Bu ifadeleri $u_t + au_x = f$ ifadesinde $(x, t + 1/2\Delta t)$ noktası civarında uygulanırsa, şu denklemler elde edilir:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta t} + a \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1} + v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{4\Delta x} = \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{2} \quad . \quad (3.36)$$

Bundan dolayı *Crank-Nicolson* metodunun mertebesi hem zamana göre $O(\Delta t^2)$ hem de koordinat değişkenine göre de $O(\Delta x^2)$ dir, kısaca *Crank-Nicolson* (2, 2) **duyarlılık mertebesindedir**. Şimdi bir sonlu fark denkleminin mertebesinin formal tanımı verilebilir.

Tanım: Verilen bir $Pu = f$ kısmi diferansiyel denklemi ile tutarlı olan bir sonlu fark denklemi $P_{h,k}v = R_{h,k}f$, zamana göre p . mertebeden ve koordinat değişkenine göre q . mertebededir denir eğer her türevlenebilir sürekli $\phi(x, t)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik sağlanıyorsa:

$$P_{h,k}\phi - R_{h,k}P\phi = O(\Delta t^p) + O(\Delta x^q) \quad (3.37)$$

burada $h = \Delta x$, ve $k = \Delta t$. Bu durumda kullanılan sonlu fark denklemi (p, q) **mertebesinde duyarlıdır** diyeceğiz. $P_{h,k}\phi - R_{h,k}P\phi$ ifadesi kullanılan metodun *kesme hatası terimi* olarak adlandırılır. Bunlara ilaveten, $P_{h,k}$ ifadesinin P ile tutarlı olabilmesi için, $R_{h,k}$ operatörünün birim operatöre, iyi bir yaklaşım olması gerekir (Strikwerda 1989, pp. 1-55).

4 SFM ÖRNEKLERİ VE KARARLILIK

Probleme lineer olmayan terimin etkisini görebilmek ve çözümü bilinen lineer problemlerle kıyaslayabilmek amacıyla β parametresi ilave edildiğinde

$$\frac{\partial}{\partial t}c(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(D^* \frac{\partial c}{\partial x}) + \beta c(1 - c) \quad (4.1)$$

sınır ve başlangıç koşulları da

$$\begin{aligned} c(0, t) &= B_1 \quad 0 < t < T \\ c(1, t) &= B_2, \quad 0 < t < T \\ c(0, x) &= f(x), \quad 0 < x < 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

boyutsuz olarak elde edilir. (4.1) denkleminde pozitif T değerleri için $0 < x < 1$, $0 < t < T$ eşitsizliği ile tanımlanan xt -düzlemindeki bir dikdörtgenel R bölgesini, başka bir deyişle,

$$R = \{(x, t) \mid 0 < x < 1, \quad 0 < t < T\}$$

bölgesini yatay ve dikey çizgilerle birbirinden her biri Δx ve Δt uzaklıklarında olan ağlara bölünsün. Δx uzunluğuna adım uzunluğu ve Δt 'ye de zaman adımı uzunluğu denir. Dikey ve yatay çizgilerin kesişim noktası

$$c_i^n = c(i\Delta x, n\Delta t)$$

olsun. Bu noktalara **ağ (grid, ızgara)** yada **latis** noktaları denir. Burada $0 \leq i \leq M$ ve $0 \leq n \leq N$; $M, N \in Z^+$. Bu durumda eğer

$$\Delta x = \frac{1 - 0}{M}, \quad \Delta t = \frac{T - 0}{N}$$

olacak şekilde M ve N pozitif tamsayıları seçilirse, yatay ve dikey ızgara çizgileri

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, M$$

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

olarak tanımlanır.

(4.1) denkleminde $D^* = 1$, $T = 0.1$, $B_1 = B_2 = 0$, ve $f(x) = \sin(\pi x)$ alınsın. $\beta = 0$ durumunda tam çözümün $u(x, t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}$ olduğu gösterilebilir. Aşağıdaki sonlu fark metodlarını mukayese edebilmek için bu gerçek çözümün mümkün olduğu hallerde hatanın mertebesini bulabilmek için $t_n = n\Delta t$ zamanındaki hata şöyle tanımlansın:

$$\begin{aligned} \text{Hata}(t_n) &= \|u(\cdot, t_n) - v^n\|_h \\ &= \sqrt{(h \sum_m |u(x_m, t_n) - v_m^n|^2)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

burada toplam, bütün ağ noktalarında yapılmaktadır.

Şimdi (4.1) denkleminin yaklaşık çözümünü 3 farklı sonlu fark metod ile çözüp, bu yöntemlerin ne zaman kararlı yaklaşık çözüm verdiklerini genlik faktörlerini bularak incelenecektir.

1. Açık İleri Euler
2. Kapalı Geri Euler
3. Crank-Nicolson

Her bir yöntemde ortaya çıkan denklem sistemi lineer olmadığı için, bu denklem sistemlerini Newton-Raphson metodu ile çözülecektir. Şimdi sırasıyla bu metodları ve metodların varsa yakınsaklığı için kararlılık koşullarını problemin $\beta = 0$ hali için ele alınacaktır. $\frac{\partial^2 c_i^n}{\partial x^2}$ değerini sol uç sınır değerinde, $i = 0$ için Tablo (4.2) ile verilen ileri fark formülünü; sağ uç sınır değerinde, $i = M$ için Tablo (4.2) ile verilen geri fark formülünü kullanarak yazılacaktır (Rao 2002, pp. 514-515).

Tablo 4.1: **Sonlu Fark Formülleri**

Yaklaşım tipi	Formül	Kesme Hatası
ileri farklar	$f'_i = \frac{(f_{i+1}-f_i)}{(\Delta x)}$ $f''_i = \frac{(f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i)}{(\Delta x)^2}$ $f'''_i = \frac{(f_{i+3}-3f_{i+2}+3f_{i+1}-f_i)}{(\Delta x)^3}$ $f''''_i = \frac{(f_{i+4}-4f_{i+3}+6f_{i+2}-4f_{i+1}+f_i)}{(\Delta x)^4}$	$O(\Delta x)$
geri farklar	$f'_i = \frac{(f_i-f_{i-1})}{(\Delta x)}$ $f''_i = \frac{(f_i-2f_{i-1}+f_{i-2})}{(\Delta x)^2}$ $f'''_i = \frac{(f_i-3f_{i-1}+3f_{i-2}-f_{i-3})}{(\Delta x)^3}$ $f''''_i = \frac{(f_i-4f_{i-1}+6f_{i-2}-4f_{i-3}+f_{i-4})}{(\Delta x)^4}$	$O(\Delta x)$
merkezi farklar	$f'_i = \frac{(f_{i+1}-f_{i-1})}{2(\Delta x)}$ $f''_i = \frac{(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})}{(\Delta x)^2}$ $f'''_i = \frac{(f_{i+2}-2f_{i+1}+2f_{i-1}-f_{i-2})}{2(\Delta x)^3}$ $f''''_i = \frac{(f_{i+2}-4f_{i+1}+6f_i-4f_{i-1}+f_{i-2})}{(\Delta x)^4}$	$O(\Delta x^2)$

Tablo 4.2: **Yüksek Mertebeden Sonlu Fark Formülleri**

Yaklaşım tipi	Formül	Kesme Hatası
ileri farklar	$f'_i = \frac{(-f_{i+2}+4f_{i+1}-3f_i)}{2(\Delta x)}$ $f''_i = \frac{(-f_{i+3}+4f_{i+2}-5f_{i+1}+2f_i)}{(\Delta x)^2}$ $f'''_i = \frac{(-3f_{i+4}+14f_{i+3}-24f_{i+2}+18f_{i+1}-5f_i)}{2(\Delta x)^3}$ $f''''_i = \frac{(-2f_{i+5}+11f_{i+4}-24f_{i+3}+26f_{i+2}-14f_{i+1}+3f_i)}{(\Delta x)^4}$	$O(\Delta x)^2$
geri farklar	$f'_i = \frac{(3f_i-4f_{i-1}+f_{i-2})}{2(\Delta x)}$ $f''_i = \frac{(2f_i-5f_{i-1}+4f_{i-2}-f_{i-3})}{(\Delta x)^2}$ $f'''_i = \frac{(5f_i-18f_{i-1}+24f_{i-2}-14f_{i-3}+3f_{i-4})}{2(\Delta x)^3}$ $f''''_i = \frac{(3f_i-14f_{i-1}+26f_{i-2}-24f_{i-3}+11f_{i-4}-2f_{i-5})}{(\Delta x)^4}$	$O(\Delta x^2)$
merkezi farklar	$f'_i = \frac{(-f_{i+2}+8f_{i+1}-8f_{i-1}+f_{i-2})}{12(\Delta x)}$ $f''_i = \frac{(-f_{i+2}+16f_{i+1}-30f_i+16f_{i-1}-f_{i-2})}{12(\Delta x)^2}$ $f'''_i = \frac{(-f_{i+3}+8f_{i+2}-13f_{i+1}+13f_{i-1}-8f_{i-2}+f_{i-3})}{8(\Delta x)^3}$ $f''''_i = \frac{(-f_{i+3}+12f_{i+2}-39f_{i+1}+56f_i-39f_{i-1}+12f_{i-2}-f_{i-3})}{6(\Delta x)^4}$	$O(\Delta x)^4$

4.1 LİNEER DURUM

(4.1) denkleminde $\beta = 0$ alınarak, Açık İleri Euler metodu, Kapalı Geri Euler metodu ve Crank-Nicolson metodu ile oluşacak lineer denklemler aşağıda sırasıyla incelenecektir.

4.1.1 Açık İleri Euler Metodu

Bu yöntemde (2.6) denkleminde eşitliğin solundaki 1.mertebeden olan ifadeyi ileri-fark yaklaşımıyla ve sağındaki 2. mertebeden ifade de merkezi-fark yaklaşımıyla yer değiştirilirse, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + \beta c_i^n (1 - c_i^n) \quad .$$

Bu ifade de aşağıda Açık İleri Euler Metodu dediğimiz ardışık metod ile çözülebilir:

$$c_i^{n+1} = \lambda(c_{i+1}^n + c_{i-1}^n) + (1 - 2\lambda c_i^n) + \Delta t \beta c_i^n (1 - c_i^n) \quad . \quad (4.4)$$

burada $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, ve $i = 1, 2, \dots, M - 1$. Burada $\rho = 0$ durumunda algoritmanın kararlılık koşulunu bulmak için, von Neumann analizi ile

$$c_j^n = g^n e^{ij\theta}$$

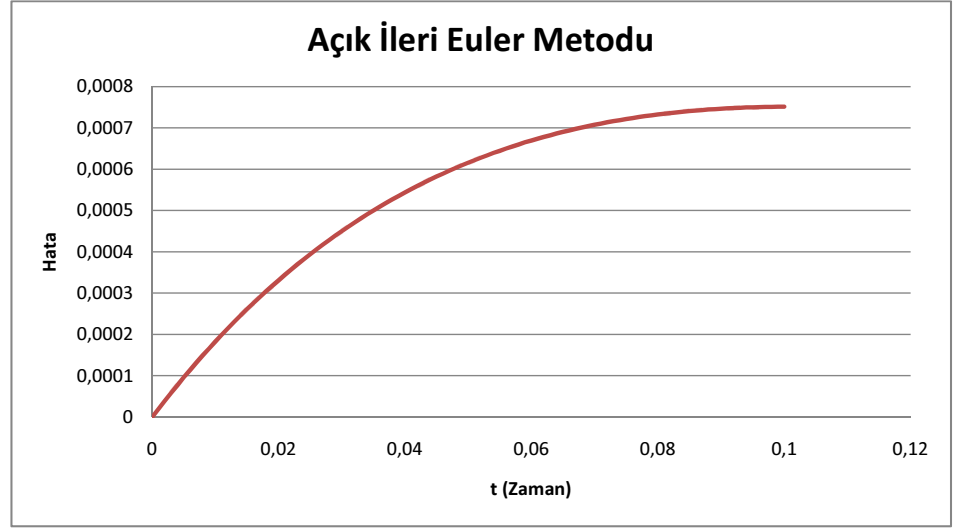
ifadesini (4.4) dekleminde koyarsak şu ifade bulunur:

$$g = \lambda(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + (1 - 2\lambda) = 2\lambda(1 - \cos(|\theta|)) \quad . \quad (4.5)$$

Yakınsaklık için $|g| \leq 1$ koşulu sağlanması gerektiğinden, kararlılık koşulu şu şekli alır:

$$\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad . \quad (4.6)$$

Bu koşul ise Δx değerini daha duyarlı sonuç için azaltıldığında, zaman adımı Δt değerini de kararlılık koşulu sağlansın diye daha fazla işlem yapma maliyetinde küçültülmesi gerektiğini söylüyor.

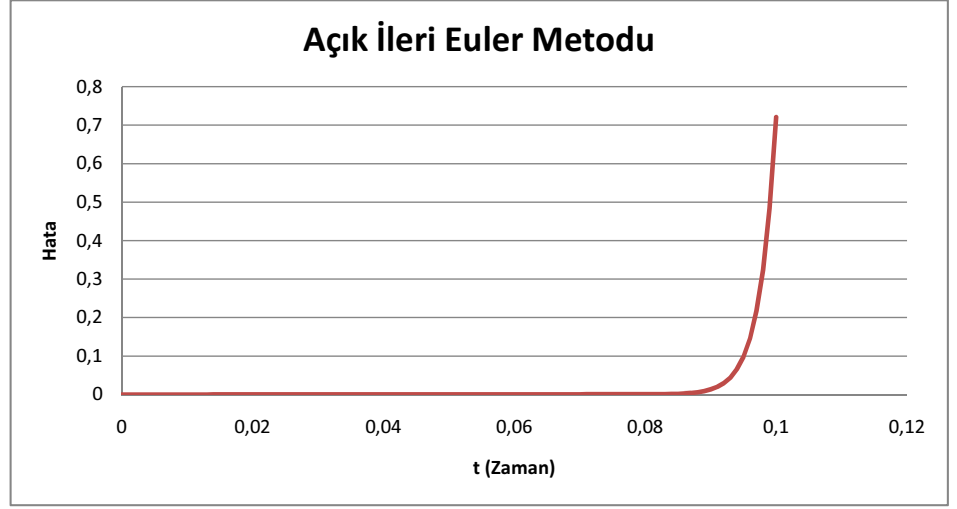


Şekil 4.1: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.4$ için hata grafiği (AİEM)

Şekil 4.1' den görüleceği üzere, $\Delta x = 1/20$, zaman adımı $\Delta t = 0.1/100$ alındığında

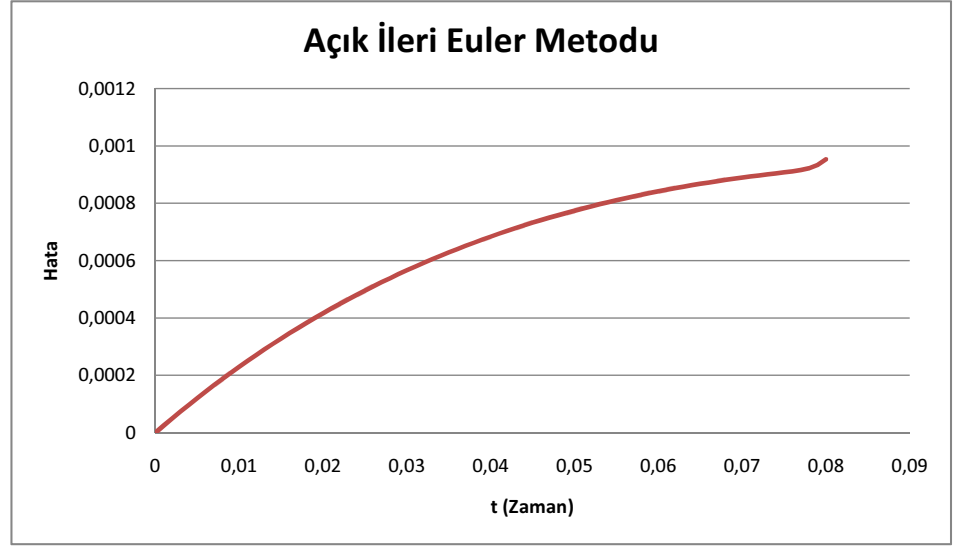
$$\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 0.4 \leq \frac{1}{2}$$

olmakta ve kararlılık koşulunu ($\lambda \leq 1/2$) sağlamaktadır. Bu da kabul edilebilir bir hataya sahiptir. Maksimum hata 7.5×10^{-4} dir.



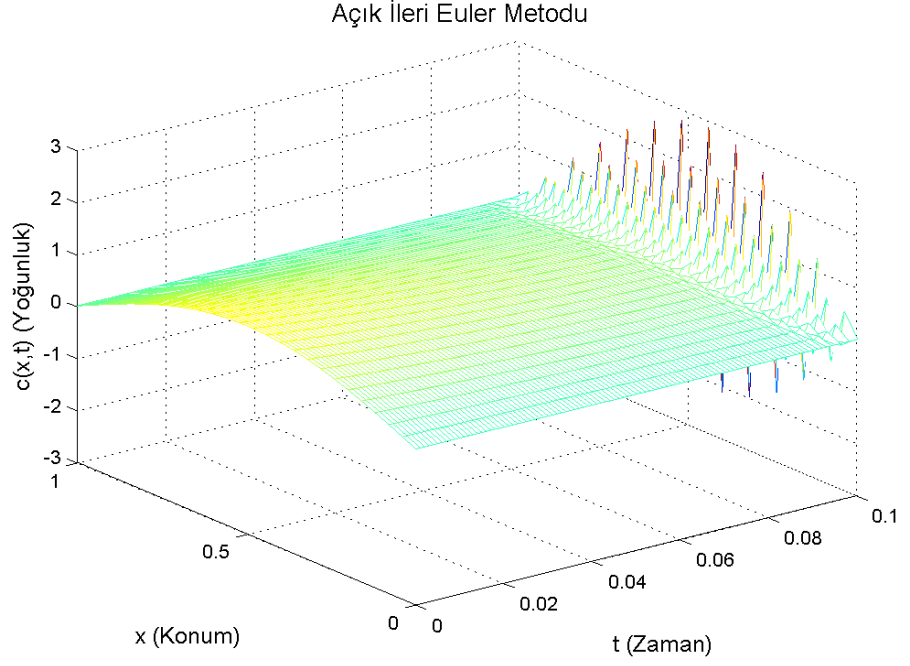
Şekil 4.2: $\Delta t = \frac{0,1}{100}$ $\Delta x = \frac{1}{25}$ ve $\lambda = 0,625$ için hata grafiği (AİEM)

Şekil 4.2' de, $\Delta x = 1/25$, zaman adımı $\Delta t = 0,1/100$ alındığında $\lambda = 0,625$ olup, kararlılık koşulu ihlal edilip, Şekil 4.4 çözüm grafiğinde de sapmanın çok yüksek olduğu görülmektedir.



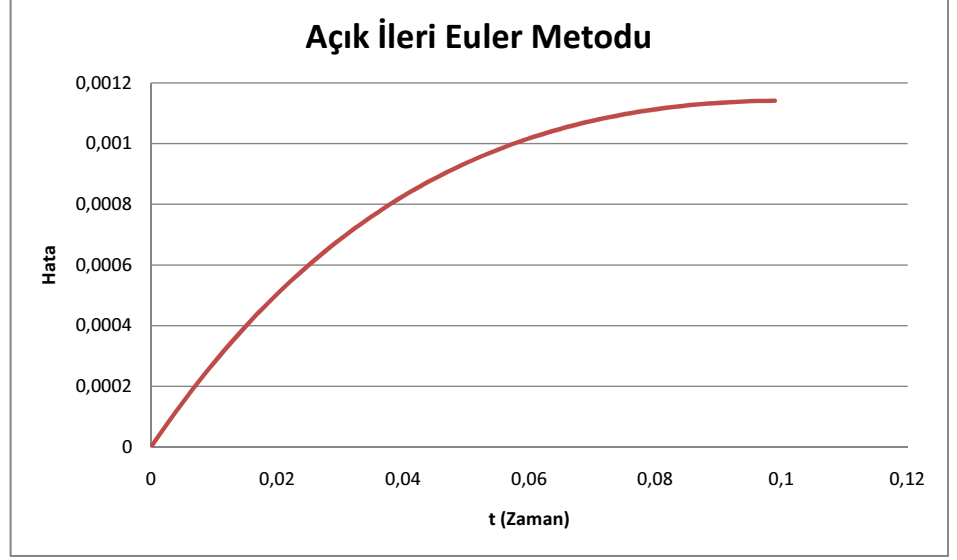
Şekil 4.3: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$ $\Delta x = \frac{1}{25}$, $\lambda = 0.625$ için yakınlaştırılmış hata grafiği (AİEM)

Şekil 4.3, 0 ile 0.008 aralığında Şekil 4.2 grafiği yakınlaştırılarak çizdirilmiştir. Hatanın dağılımının daha net bir şekilde gösterilmesi sağlanmıştır. Kararlılık koşulu ihlal edilmiştir.



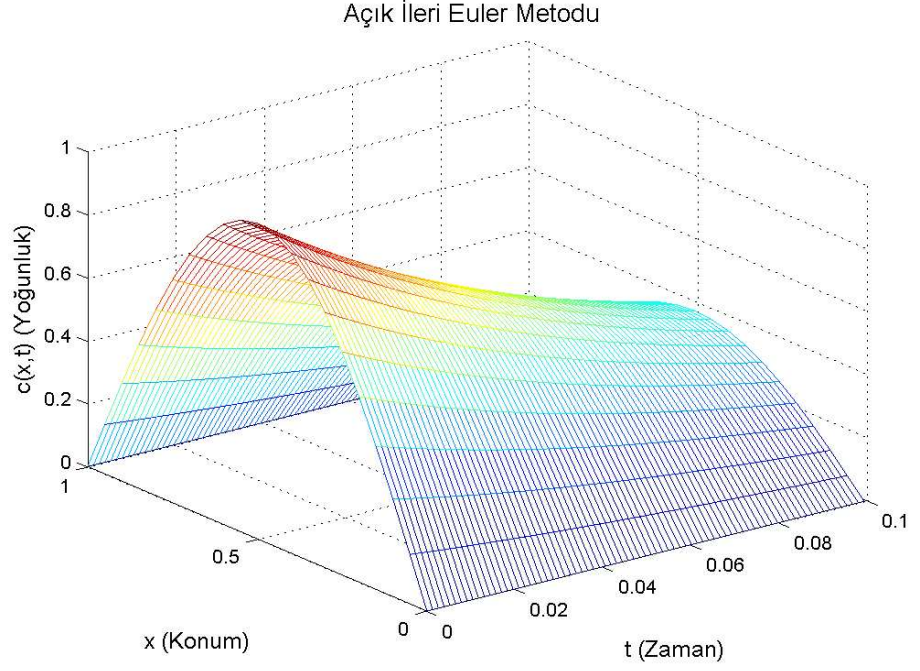
Şekil 4.4: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{25}$ ve $\lambda = 0.625$ için çözüm grafiği (AİEM)

Şekil 4.4, Açık İleri Euler Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{25}$, $\lambda = 0.625$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. Grafikte de görülmektedir ki t(zaman) değeri sıfırdan uzaklaştıkça sapmalar oluşmuştur.



Şekil 4.5: $\Delta t = \frac{0,1}{77}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0,5208$ için hata grafiği (AİEM)

Şekil 4.5, $\Delta x = 1/20$, zaman adımı $\Delta t = 0,1/77$ alındığında $\lambda = 0,5208$ olup, kararlılık koşulu ihlal edilmesine karşın hata hala kabul edilebilir bir oranda olup bu da **kararlılık koşulunun yeter bir koşul olduğunu ama gerek bir koşul olmadığını** göstermektedir.



Şekil 4.6: $\Delta t = \frac{0.1}{77}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.5208$ için çözüm grafiği (AİEM)

Şekil 4.6, $\Delta x = 1/20$, zaman adımı $\Delta t = 0.1/77$ ve $\lambda = 0.5208$ alınarak, Açık İleri Euler Metodu kullanılarak çözüm grafiği çizdirilmiştir. Kararlılık koşulu ihlal edilmiştir.

4.1.2 Kapalı Geri Euler Metodu

Bu bölümde (4.1) denkleminde, eşitliğin solundaki 1.mertebeden olan ifade geri-fark yaklaşımıyla ve sağındaki 2. mertebeden ifade de merkezi-fark yaklaşımıyla değiştirilirse, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{c_i^n - c_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + \beta c_i^n (1 - c_i^n) \quad . \quad (4.7)$$

Bu ifade düzenlenirse, Açık İleri Euler Metodu dediğimiz ardışık metot şu hali alır:

$$-\lambda c_{i-1}^n + (1 + 2\lambda)c_i^n - \lambda c_{i+1}^n - \Delta t \beta c_i^n (1 - c_i^n) = c_i^{n-1} \quad (4.8)$$

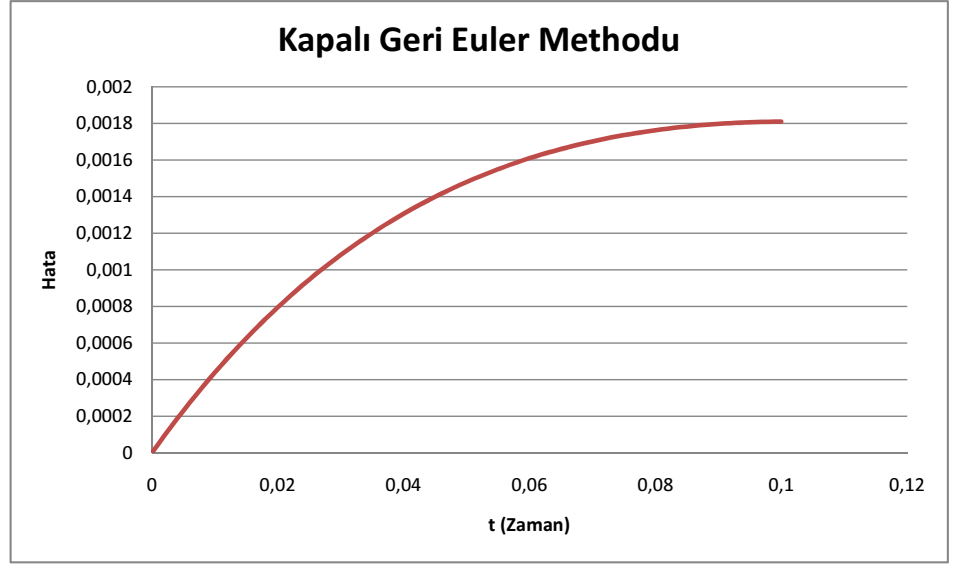
burada $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, ve $i = 1, 2, \dots, M - 1$ dir. Burada $\beta = 0$ durumunda algoritmanın kararlılık koşulunu bulmak için, von Neumann analizini kullanarak

$$c_j^n = g^n e^{ij\theta} \quad (4.9)$$

ifadesini (4.7) dekleminde koyulursa şu ifade bulunur:

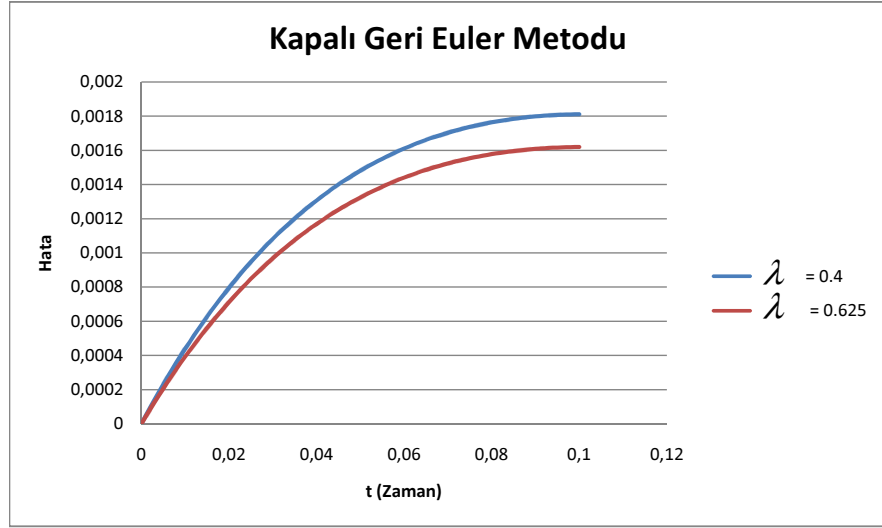
$$\frac{1}{g} = -\lambda e^{-i\theta} + (1 + 2\lambda) - \lambda e^{i\theta}, \quad g = \frac{1}{1 + 2\lambda(1 - \cos(\theta))} \quad . \quad (4.10)$$

Buradan her λ ve θ değerleri için $|g| \leq 1$ olduğu görülür.



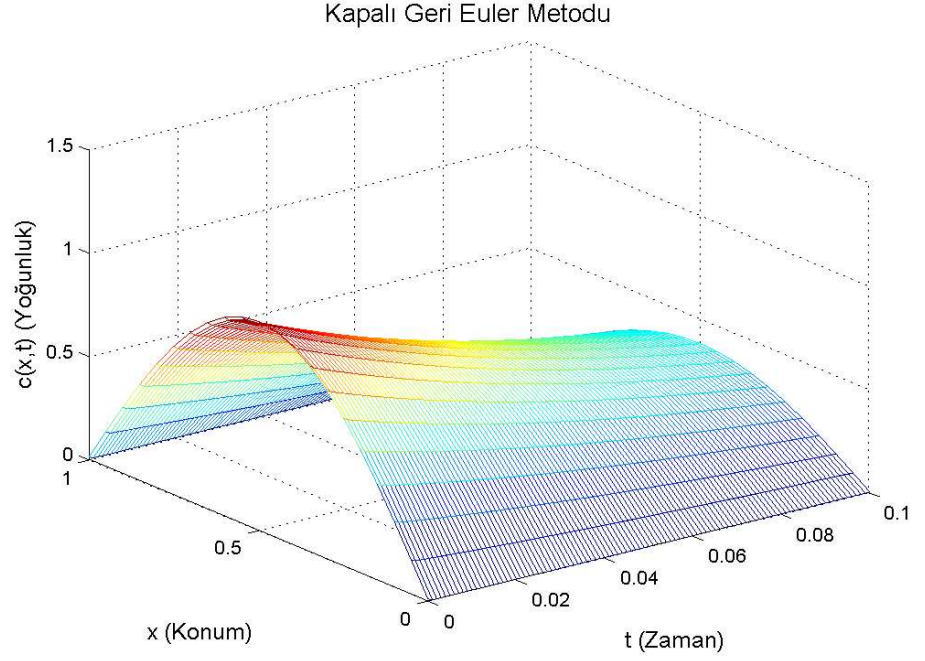
Şekil 4.7: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.4$ için hata grafiği (KGEM)

Şekil 4.7' de, $\Delta x = 1/20$, zaman adımı $\Delta t = 0.1/100$ alınarak, Kapalı Geri Euler Metodu kullanılmıştır. Maksimum hata 1.8×10^{-3} olarak bulunmuştur.



Şekil 4.8: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\lambda = 0.4$ ve $\lambda = 0.625$ için hata grafiği (KGEM)

Şekil 4.8' de, $\Delta x = 1/20$ ve $\Delta x = 1/25$, zaman adımı $\Delta t = 0.1/100$ alındığında hatalar arasındaki fark görülmektedir. $\Delta x = 1/20$ iken maksimum hata 1.8×10^{-3} , $\Delta x = 1/25$ iken maksimum hata 1.6×10^{-3} olarak bulunmuştur.



Şekil 4.9: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ için çözüm grafiği (KGEM)

Şekil 4.9, Kapalı Geri Euler Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.4$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. Grafik her t değeri için çizdirilmiştir.

4.1.3 Crank-Nicolson Metodu

Adını, bu yöntemi 20. yüzyılın ortalarında bulan John Crank ve Phyllis Nicolson' dan alan bu metotta, zaman türevi ileri fark formülü kullanılarak, konum türevi ise probleme uygun olan fark formülleri ile yazılan n ve $n + 1$ adım türevlerinin ortalaması alınarak elde edilir. Bu bölümde (4.7) denkleminde geri dönüp bu metodu iyileştirmeye çalışılacaktır. Şimdiki haliyle, yöntemde, eğer merkezi fark denkleminde yaklaşımı zaman adımı olarak $\frac{\Delta t}{2}$ aldığında eşitliğin sağındaki ifade n zaman adımındaki değere göre, sol tarafındaki denklem de n ile $n - 1$ zaman adımları arasındaki fark yaklaşımlarını vermektedir. Bu da tutarsızlık göstermektedir. Bunun yerine denklemin sağ tarafında n ile $n + 1$ adımları arasında dengeyi kurabilmek amacıyla orta nokta alınır. Bunu yapabilmek için (4.7) denkleminin sağ tarafında merkezi farkların n ile $n + 1$ adımları arasında ortalaması alınır. Bu durumda aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left[\frac{c_{i+1}^{n+1} - 2c_i^{n+1} + c_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \\ &\quad + \beta(c_i^{n+1} + c_i^n)/2(1 - (c_i^{n+1} + c_i^n)/2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$-\lambda c_{i+1}^{n+1} + 2(1 + \lambda)c_i^{n+1} - \lambda c_{i-1}^{n+1} = \lambda c_{i+1}^n + 2(1 - \lambda)c_i^n + \lambda c_{i-1}^n \quad (4.12)$$

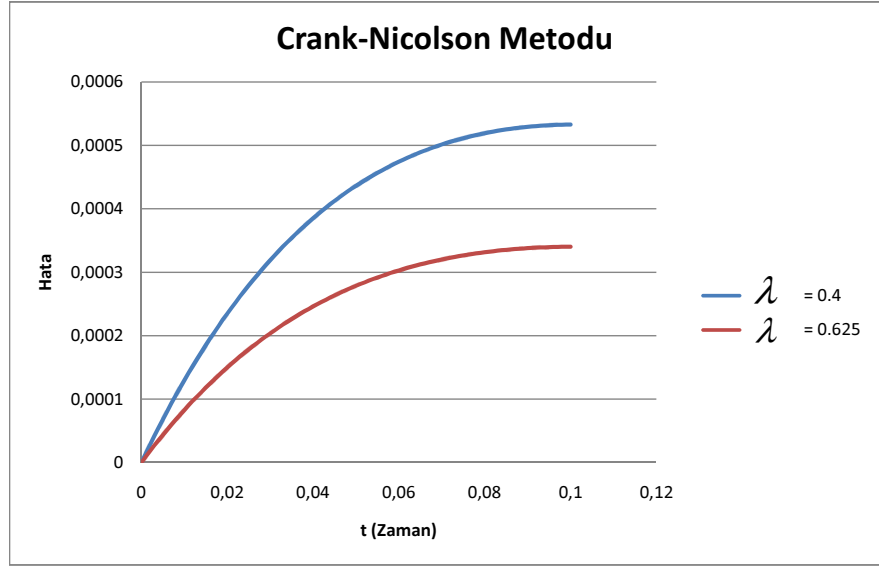
(4.9) denklemini (4.12) denkleminde yerine koyulursa:

$$2g(1 + \lambda(1 - \cos(\theta))) = 2(1 - \lambda(1 - \cos(\theta))) \quad (4.13)$$

Buradan da

$$g = \frac{1 - \lambda(1 - \cos(\theta))}{1 + \lambda(1 - \cos(\theta))}, \quad (4.14)$$

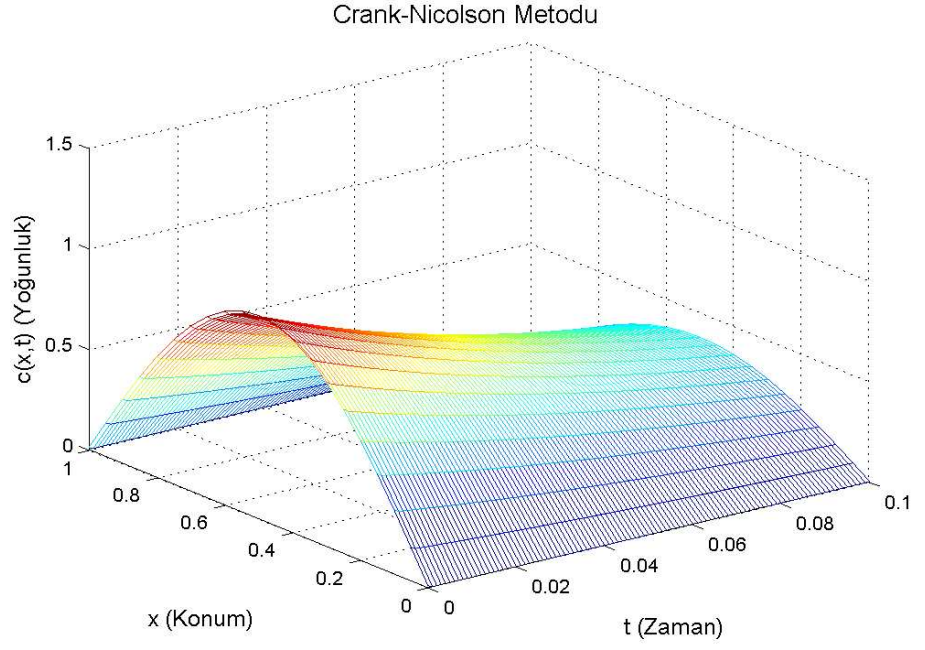
$|g| \leq 1$ eşitsizliği her koşulda sağlandığından elde edilen sistemin koşulsuz kararlı olduğu söylenir.



Şekil 4.10: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\lambda = 0.625$ için hata grafiği (CNM)

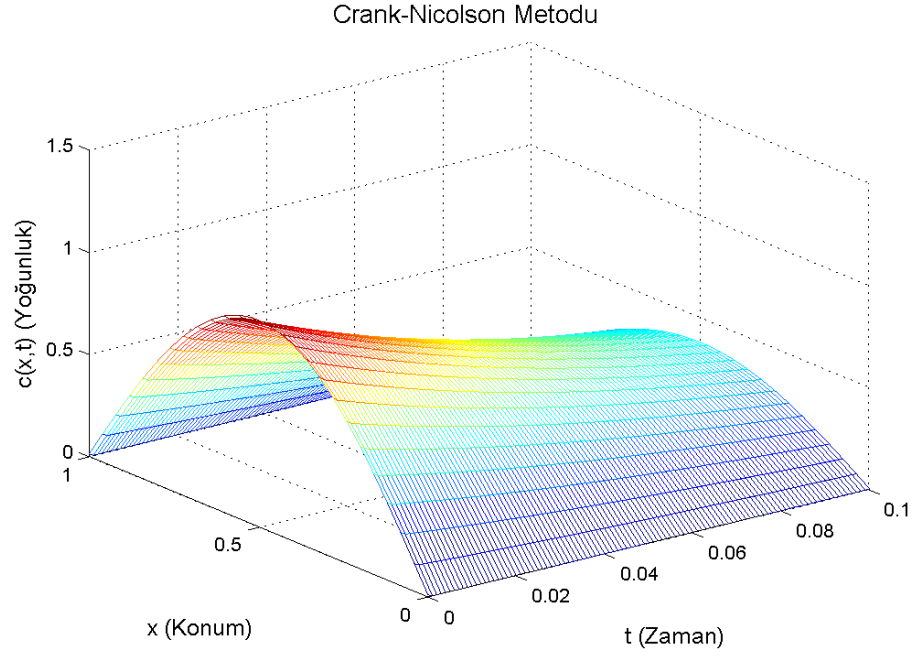
Şekil 4.10' da, farklı λ değerleri için hata grafiği görülmektedir. Maksimum hata grafikten de görüldüğü gibi diğer metotlarla elde edilen hatalardan daha küçüktür. Bu durum Crank-Nicolson yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi çalıştığını gösterir. Maksimum hata $\lambda = 0.4$ iken 5.2×10^{-4} , $\lambda = 0.625$ iken 3.3×10^{-4} 'dür.

$\lambda = 0.4$ ve $\lambda = 0.625$ için çözüm grafiklerine de bakılabilir:



Şekil 4.11: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ için çözüm grafiği (CNM)

Şekil 4.11, Crank-Nicolson Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$ ve $\lambda = 0.4$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. t (zaman) sıfırdan uzaklaştıkça çözümdeki değişim grafikte görülmektedir.



Şekil 4.12: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{25}$, $\lambda = 0.625$ için çözüm grafiği (CNM)

Çözüm grafikleri de göstermektedir ki Crank-Nicolson metodu daha iyi sonuç vermektedir. λ nın her değeri için bu metot çalışmaktadır.

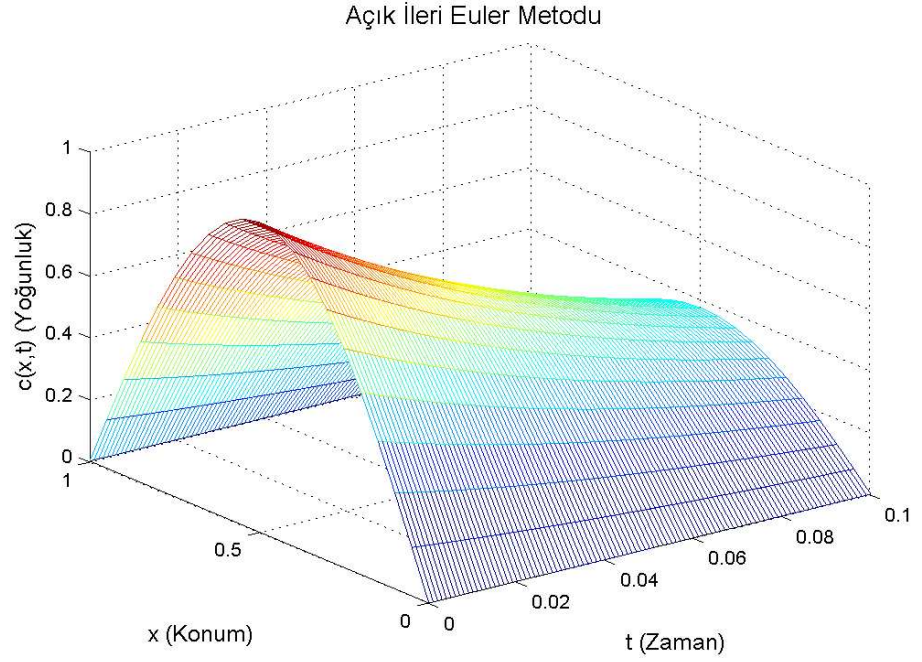
4.2 LİNEER OLMAYAN DURUM

$\beta \neq 0$ olduğu durumda, 1-boyutlu sınır değer problemini, yaklaşık çözümü sonlu farklar metodu ve ortaya çıkan lineer olmayan denklem sistemleri de Newton-Raphson metodu ile çözülerek çözüm grafikleri elde edildi. Newton-Raphson metodunda duyarlılık 10^{-7} olarak alındı. Farklı $\beta \neq 0$ değerleri için herbir metot ile oluşan grafikler aşağıda yer almaktadır.

4.2.1 Açık İleri Euler Metodu

$\beta = 0.006$, $\beta = 100$, $\beta = 250$ ve $\beta = 500$ değerleri kullanılarak çözüm grafikleri oluşturulmuştur. Bu grafikleri çizmek için önce fortran programında yazılan kod ile değerler oluşturulmuştur. Oluşan değerler ile matlab programında mesh komutu kullanılarak çözüm grafikleri elde edilmiştir. Bu grafikler sırasıyla aşağıda yer almaktadır:

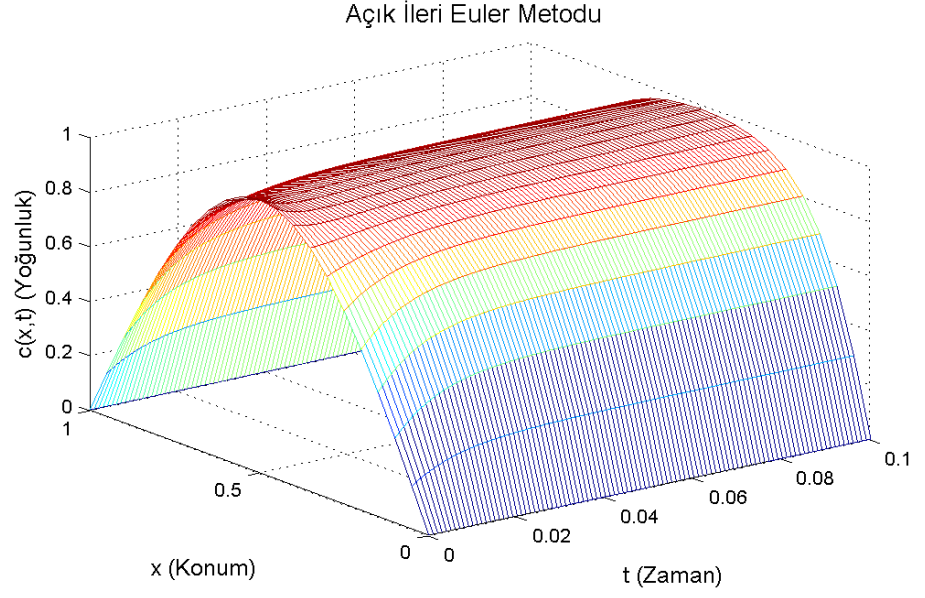
$\beta = 0.006$ için :



Şekil 4.13: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 0.006$ için çözüm grafiği (AİEM)

Şekil 4.13, Açık İleri Euler Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 0.006$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. Oluşan grafikte başlangıç koşulunun ve sınır koşullarının etkisi de görülmektedir.

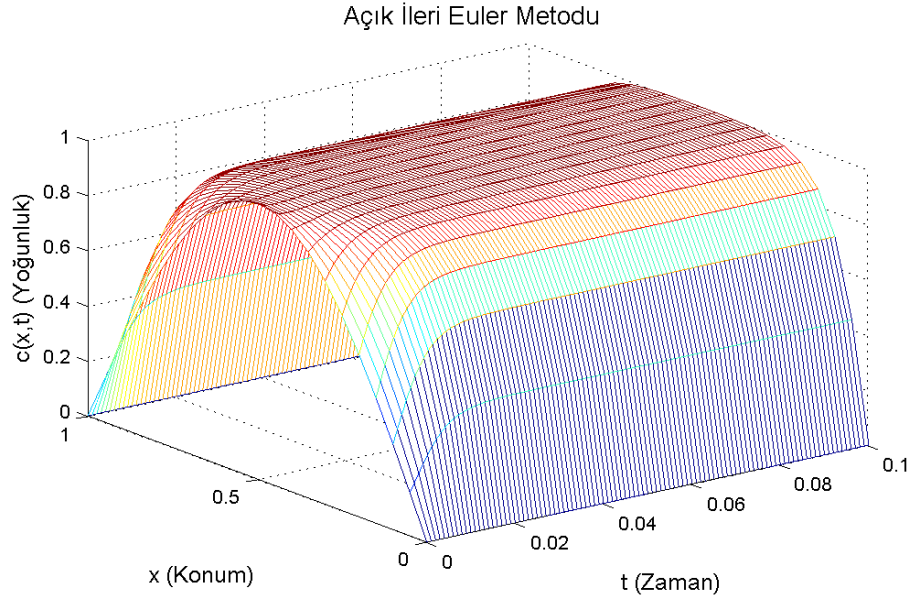
$\beta = 100$ için :



Şekil 4.14: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 100$ için çözüm grafiği (AİEM)

Şekil 4.14, Açık İleri Euler Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 100$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. Grafik her t değeri için çizdirilmiştir. β değerinin artması çözümü etkilemektedir. Grafikte de görülmektedir ki çözüm 1' den fazla değer almamaktadır.

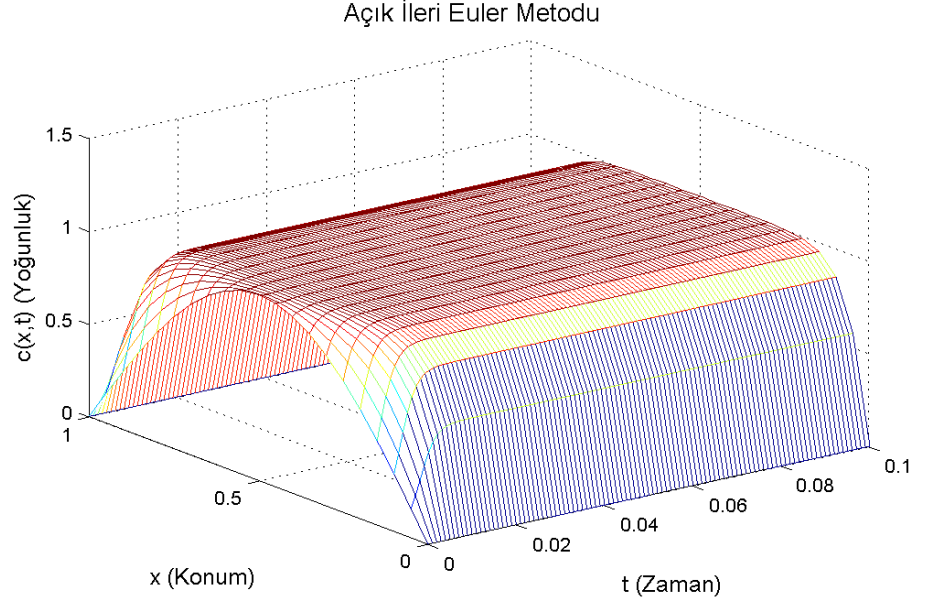
$\beta = 250$ için :



Şekil 4.15: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 250$ için çözüm grafiği (AİEM)

Şekil 4.15, Açık İleri Euler Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 250$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. Grafik her t değeri için çizdirilmiştir. t(zaman) sıfırdan uzaklaştıkça çözüm her t değeri için değişmektedir.

$\beta = 500$ için :



Şekil 4.16: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 500$ için çözüm grafiği (AİEM)

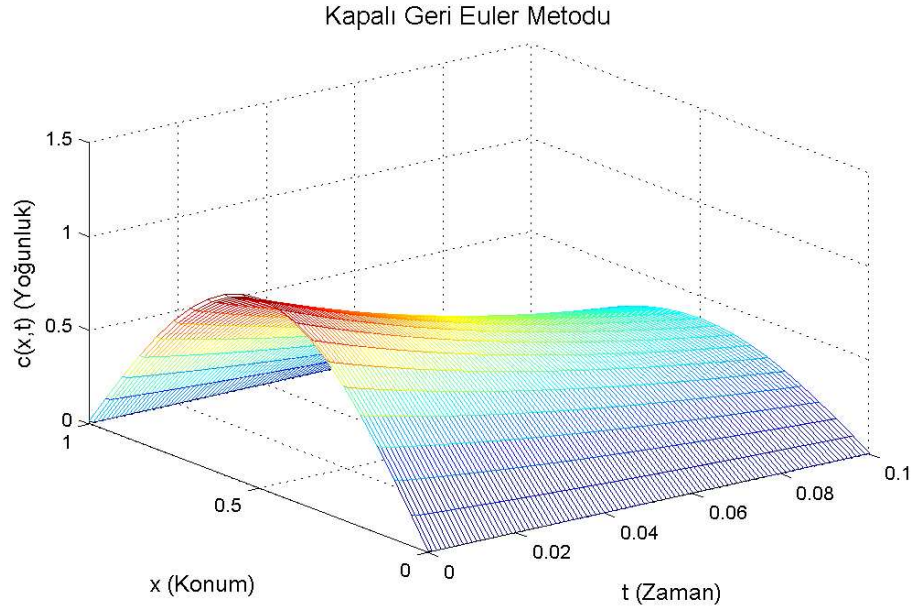
Şekil 4.16, Açık İleri Euler Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 500$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir.

Farklı β değerleri kullanılarak çizdirilen grafiklerde de görülmüştür ki β değerinin artması c(hücre konsantrasyonu)' nin zamana göre değişimini etkilemektedir.

4.2.2 Kapalı Geri Euler Metodu

Kapalı Geri Euler Metodu ile $\beta = 0.006$, $\beta = 100$, $\beta = 250$ ve $\beta = 500$ değerleri kullanılarak çözüm grafikleri oluşturulmuştur. Bu grafikleri çizmek için önce fortran programında yazılan kod ile değerler oluşturulmuş, oluşan değerler ile matlab programında mesh komutu kullanılarak çözüm grafikleri elde edilmiştir. Bu grafikler sırasıyla aşağıda yer almaktadır:

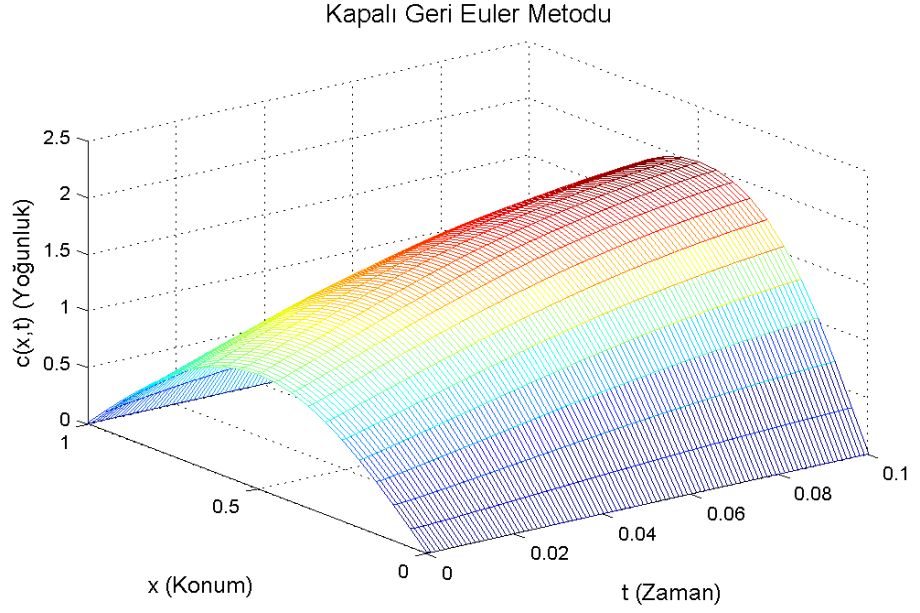
$\beta = 0.006$ için :



Şekil 4.17: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 0.006$ için çözüm grafiği (KGEM)

Şekil 4.17, Kapalı Geri Euler Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 0.006$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. Grafik her t değeri için çizdirilmiştir. t(zaman) sıfırdan uzaklaştıkça çözüm her t değeri için değişmektedir.

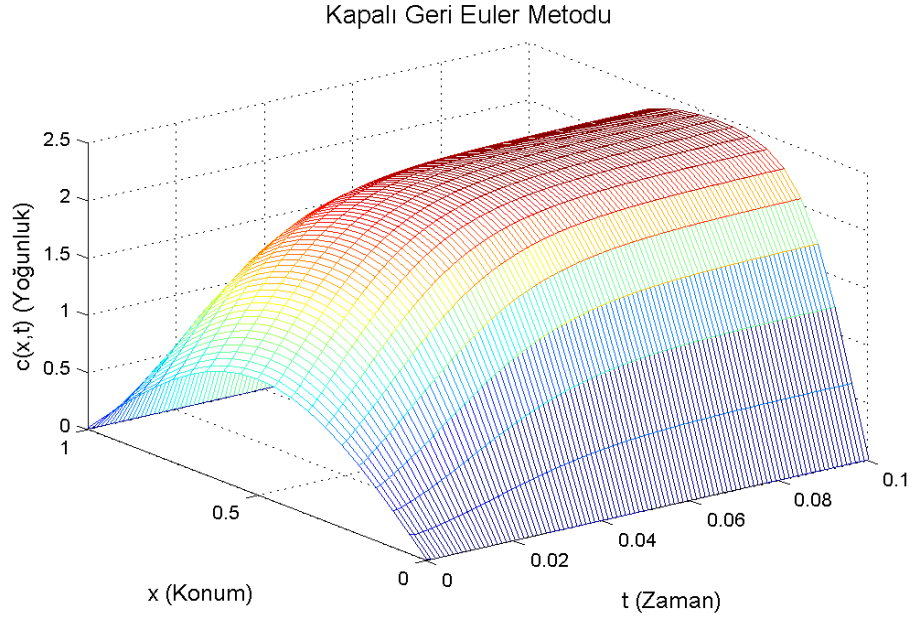
$\beta = 100$ için :



Şekil 4.18: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 100$ için çözüm grafiği (KGEM)

Şekil 4.18, Kapalı Geri Euler Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 100$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. Başlangıç koşulunun parabolik etkisi görülmektedir ve t(zaman) değeri sıfırdan uzaklaştıkça çözümdeki değişim grafikte görülmektedir.

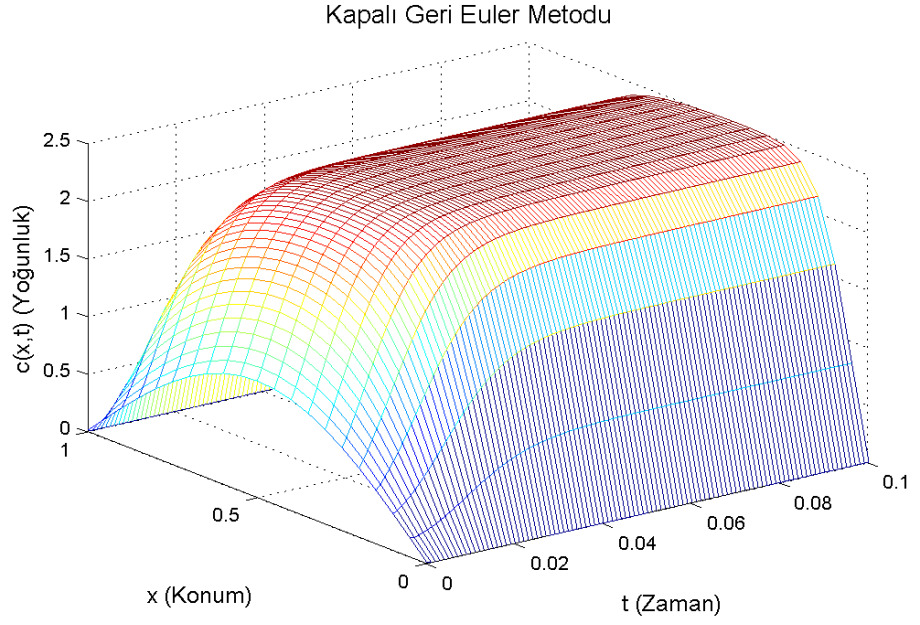
$\beta = 250$ için :



Şekil 4.19: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 250$ için çözüm grafiği (KGEM)

Şekil 4.19, Kapalı Geri Euler Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 250$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. β değerinin artması çözüm grafiğini etkilemektedir.

$\beta = 500$ için :



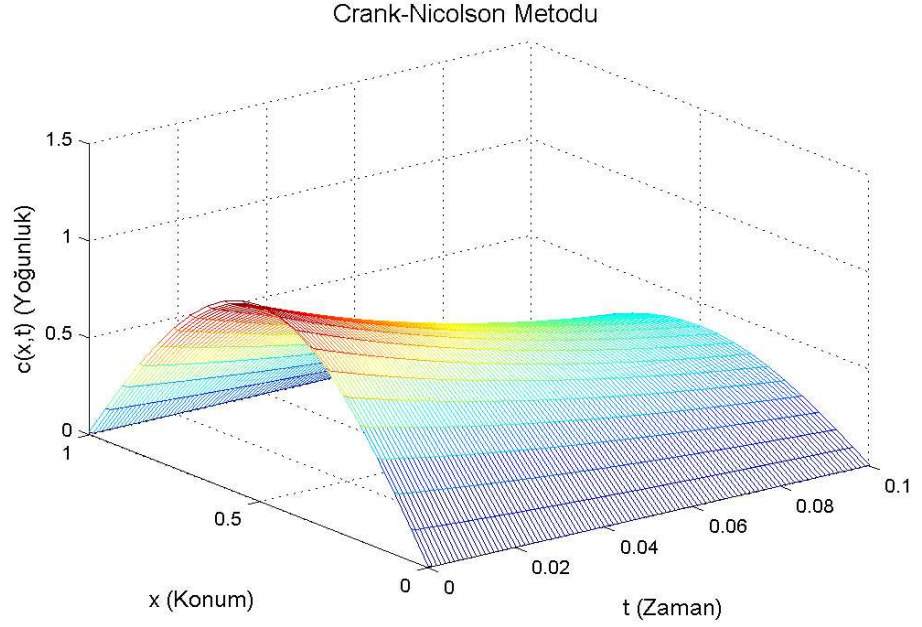
Şekil 4.20: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 500$ için çözüm grafiği (KGEM)

Şekil 4.20, Kapalı Geri Euler Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 500$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir.

4.2.3 Crank-Nicolson Metodu

Crank-Nicolson Metodu ile $\beta = 0.006$, $\beta = 100$, $\beta = 250$ ve $\beta = 500$ değerleri kullanılarak çözüm grafikleri oluşturulmuştur. Bu grafikleri çizmek için önce fortran programında yazılan kod ile değerler oluşturulmuştur. Oluşan değerler ile matlab programında mesh komutu kullanılarak çözüm grafikleri elde edilmiştir. Grafiklerde de en iyi sonucun Crank-Nicolson Metodu ile alındığı görülmektedir. Bu grafikler sırasıyla aşağıda yer almaktadır:

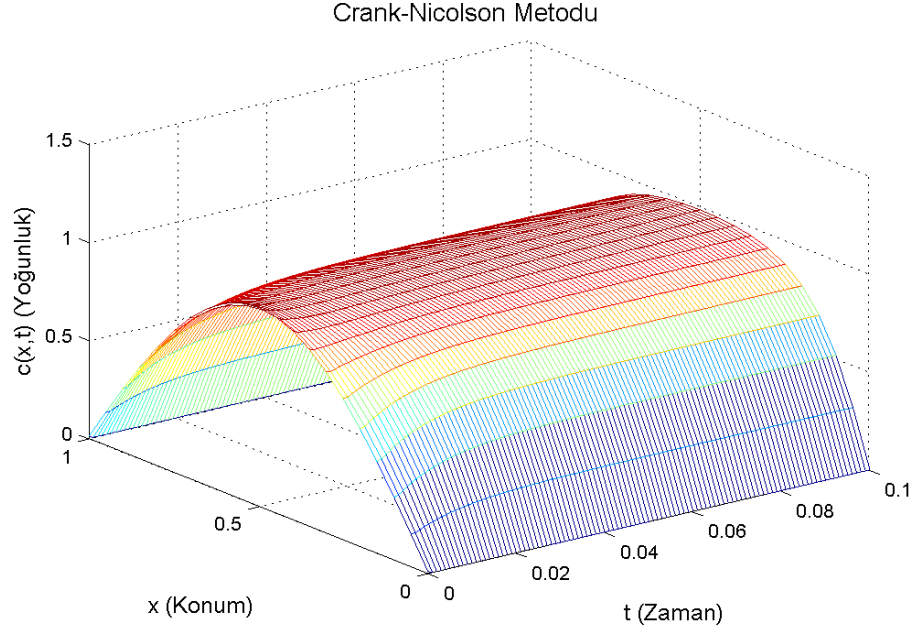
$\beta = 0.006$ için :



Şekil 4.21: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 0.006$ için çözüm grafiği (CNM)

Şekil 4.21, Crank-Nicolson Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 0.006$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. Grafikte sınır ve başlangıç koşullarının etkisi görülmektedir. Grafik her t(zaman) değeri için çizdirilmiştir.

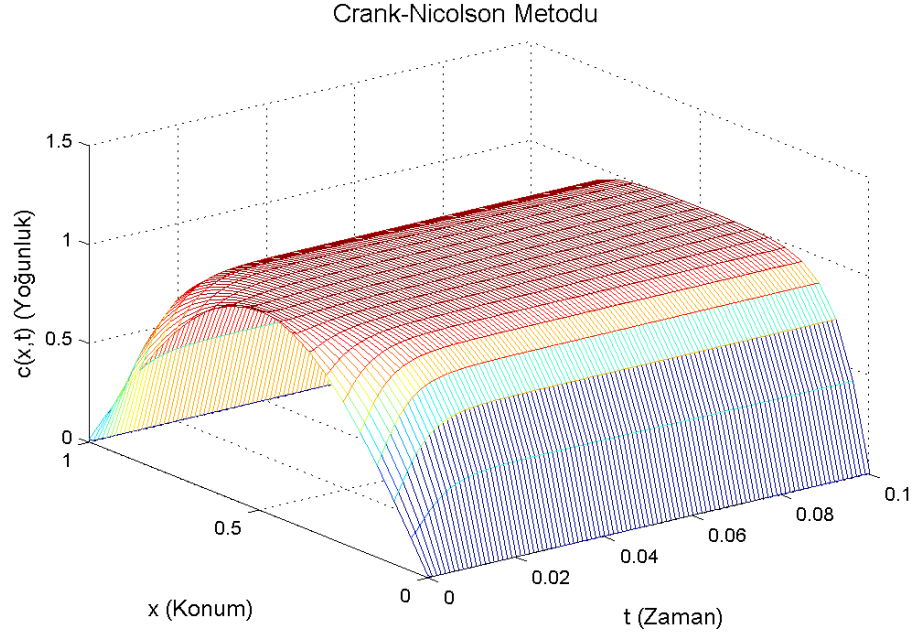
$\beta = 100$ için :



Şekil 4.22: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 100$ için çözüm grafiği (CNM)

Şekil 4.22, Crank-Nicolson Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 100$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. β değerinin artması her t (zaman) için çözümü etkilemektedir.

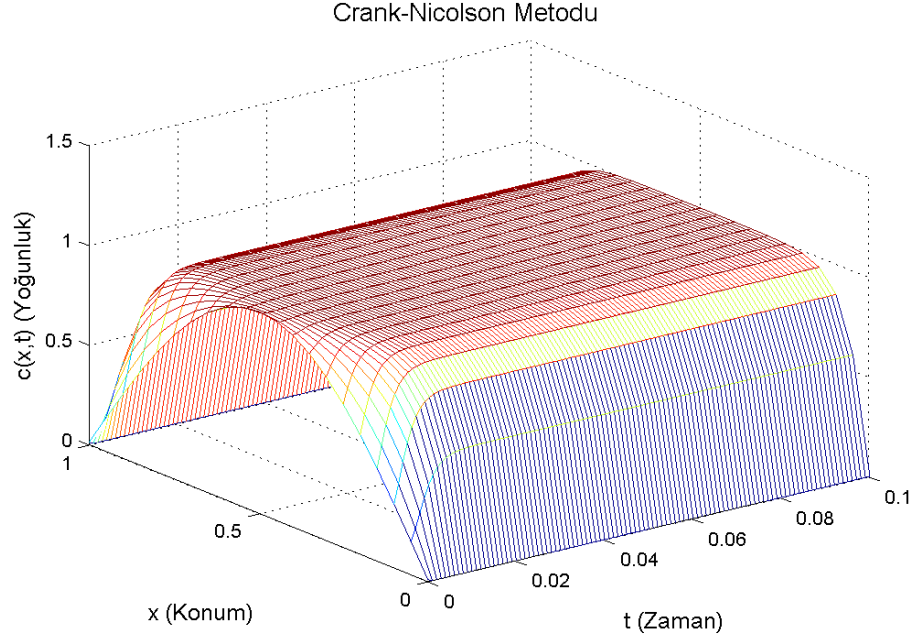
$\beta = 250$ için :



Şekil 4.23: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 250$ için çözüm grafiği (CNM)

Şekil 4.23, Crank-Nicolson Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 250$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir. t (zaman) sıfırdan uzaklaştıkça çözümdeki değişim grafikte görülmektedir.

$\beta = 500$ için :



Şekil 4.24: $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 500$ için çözüm grafiği (CNM)

Şekil 4.24, Crank-Nicolson Metodu kullanılarak, $\Delta t = \frac{0.1}{100}$, $\Delta x = \frac{1}{20}$, $\lambda = 0.4$ ve $\beta = 500$ alınarak, çözüm grafiği çizdirilmiştir.

Çizdirilen grafiklerde de görülmüştür ki en iyi sonuç Crank-Nicolson metodu ile alınmaktadır.

4.2.4 Crank-Nicolson Metodu ile Oluşan Lineer Olmayan Denklem Sisteminin Sayısal Çözümü

(4.1) denkleminde Crank-Nicolson metodunun uygulandığında (4.15) denklemi elde edilir. Denklem yeniden yazılırsa:

$$\begin{aligned} \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left[\frac{c_{i+1}^{n+1} - 2c_i^{n+1} + c_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \\ &\quad + \beta(c_i^{n+1} + c_i^n)/2(1 - (c_i^{n+1} + c_i^n)/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(c_i^{n+1} - c_i^n) &= \lambda(c_{i+1}^{n+1} - 2c_i^{n+1} + c_{i-1}^{n+1} + c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n) \\ &\quad + \beta\Delta t(c_i^{n+1} + c_i^n)(2 - c_i^{n+1} - c_i^n) \end{aligned} \quad (4.15)$$

i değerleri (4.15) denkleminde yerine koyulursa $[0, 1]$ aralığında $N+1$ tane nokta için $N+1$ tane lineer olmayan denklem tanımlanır :

$i = 0$ için:

$$f_1(c_0^{n+1}, c_1^{n+1}, \dots, c_N^{n+1}) = c_0^{n+1} - 0 = 0$$

$i = 1$ için:

$$\begin{aligned} f_2(c_0^{n+1}, c_1^{n+1}, \dots, c_N^{n+1}) &= 2(c_1^{n+1} - c_1^n) \\ &\quad - \lambda(c_2^{n+1} - 2c_1^{n+1} + c_0^{n+1} + c_2^n - 2c_1^n + c_0^n) \\ &\quad + \beta\Delta t(c_1^{n+1} + c_1^n)(2 - c_1^{n+1} - c_1^n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

⋮

i = N-1 için:

$$\begin{aligned} f_N(c_0^{n+1}, c_1^{n+1}, \dots, c_N^{n+1}) &= 2(c_{N-1}^{n+1} - c_{N-1}^n) \\ &\quad - \lambda(c_{N-1}^{n+1} - 2c_{N-1}^{n+1} + c_{N-2}^{n+1} + c_N^n - 2c_{N-1}^n + c_{N-2}^n) \\ &\quad + \beta \Delta t (c_{N-1}^{n+1} + c_{N-1}^n)(2 - c_{N-1}^{n+1} - c_{N-1}^n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

i = N için:

$$f_{N+1}(c_0^{n+1}, c_1^{n+1}, \dots, c_N^{n+1}) = c_N^{n+1} - 0 = 0$$

c_0^{n+1} sol sınır değerini, c_N^{n+1} ise sağ sınır değerini vermektedir. Sınır koşulları olarak her ikisi de sıfır alınmıştır.

Bu sistemin çözümü için Newton-Raphson yöntemi kullanılacaktır. Bölüm 5' de yöntem ve algoritması yer almaktadır.

Newton-Raphson yönteminde kullanılacak $N+1 \times N+1$ lik bir tane Jacobian matris oluşturulur.

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial c_0} & \frac{\partial f_1}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial c_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial c_0} & \frac{\partial f_2}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial c_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{N+1}}{\partial c_0} & \frac{\partial f_{N+1}}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial f_{N+1}}{\partial c_N} \end{pmatrix}$$

Bu oluşan matris ve bölüm 5' de kullanılacak $\mathbf{J}(\vec{x})$ matrisidir.

5 LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

5.1 NEWTON-RAPHSON METODU

Lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümü için, sabit nokta iterasyonundan daha genel ve algoritmik bir yöntem verilecektir. Bir boyutlu uzay için sabit nokta iterasyonunda

$$g(x) = x - \phi(x)f(x)$$

özelliğini sağlayan ve g nin p sabit noktasına ikinci dereceden yakınsaklığını veren bir ϕ fonksiyonu bulunur. Newton yöntemteminde $\phi(x) = \frac{1}{f'(x)}$ olarak seçilir. Burada $f'(x) \neq 0$ dır. Benzer yöntem kullanılarak n - boyutlu uzay için $a_{ij}(x)$ elemanları \mathfrak{R}^n den \mathfrak{R} ' ye fonksiyon olan

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\vec{x}) & a_{12}(\vec{x}) & \dots & a_{1n}(\vec{x}) \\ a_{21}(\vec{x}) & a_{22}(\vec{x}) & \dots & a_{2n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\vec{x}) & a_{n2}(\vec{x}) & \dots & a_{nn}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

matrisi yazılır. Bu durumda problem, \mathbf{G} nin \vec{p} sabit noktasında tekil olmayan ve $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ çözümüne ikinci dereceden yakınsayan

$$G(\vec{x}) = \vec{x} - A(\vec{x})^{-1}F(\vec{x}) \quad (5.1)$$

özelliğini sağlayan $A(\vec{x})$ matrisini bulmaya indirgenir.

TEOREM 5.1 *Kabul edelim ki, \vec{p} , bazı $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)^t : R^n \rightarrow R$ fonksiyonları için $G(\vec{x}) = \vec{x}$ denkleminin bir çözümü olsun. Başka bir deyişle,*

$$\mathbf{G}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^t$$

g_1, g_2, \dots, g_n fonksiyonlarına \mathbf{G} 'nin koordinat fonksiyonları denir.

Eğer,

1. Her bir $i = 1, 2, \dots, n$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ türevi

$N_\delta = \{\vec{x} : \|\vec{x} - \vec{p}\| < \delta\}$ üzerinde sürekli

2. Her bir $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$\partial^2 g_i(x)/(\partial x_j \partial x_j)$ türevi, tüm $x \in N_\delta$ için sürekli ve bazı M sabiti için $|\partial^2 g_i(x)/(\partial x_j \partial x_j)| \leq M$ ise

3. Her bir $i = 1, 2, \dots, n$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için $\partial g_i(p)/(\partial x_j) = 0$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa, bu durumda öyle bir $\hat{\delta} \leq \delta$ sayısı vardır ki, herhangi bir $\vec{x}^{(0)}$ için

$$\|\vec{x}^{(0)} - p\| < \hat{\delta}$$

olması koşulu ile

$$\vec{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\vec{x}^{(k-1)})$$

dizisi \vec{p} ye ikinci dereceden yakınsar.

Bundan başka $k \geq 1$ için

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{p}\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2} \|\vec{x}^{(k-1)} - \vec{p}\|_\infty^2$$

şeklindedir.

$A(\vec{x})$, $n \times n$ tipinde tekil olmayan bir matris ve $b_{ij}\vec{x}$, $A^{-1}(\vec{x})$ matrisinin i . satır ve j . sütununun kesiştiği yerdeki elemanı olsun.

$$G(\vec{x}) = \vec{x} - A^{-1}(\vec{x})F(\vec{x})$$

olduğundan,

$$g_i(\vec{x}) = x_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{x})f_j(\vec{x})$$

fonksiyonun kısmi türevleri

$$\frac{\partial g_i(\vec{x})}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\vec{x}) + f_j(\vec{x}) \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\vec{x}) & : i = k \\ - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\vec{x}) + f_j(\vec{x}) \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\vec{x}) & : i \neq k \end{cases}$$

şeklindedir.

5.1 Teoremine göre her bir $i = 1, 2, \dots, n$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için $\partial g_i(\mathbf{p})/(\partial x_j) = 0$ olması gerekir. Bu demektir ki, $i = k$ için ,

$$0 = 1 - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{p}),$$

ya da

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{p}) = 1 \quad (5.2)$$

dir. $k \neq i$ için

$$0 = \sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{p}),$$

ya da

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\vec{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{p}) = 0 \quad (5.3)$$

dir. 1–boyutlu Newton formülündeki türev ifadesi yerine $\mathbf{J}(\vec{x})$ ile gösterilen $n \times n$ **Jacobian** matrisi gelir:

$$\mathbf{J}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Bu denklemlerden

$$(A^{-1}(\vec{p}))J(\vec{p}) = I$$

olması gerektiği görülür. Buradan

$$A(\vec{p}) = J(\vec{p})$$

elde edilir. Yani $A(\vec{x})$ uygun bir seçim, Teorem 5.1'in in (iii) koşulu sağlanacak şekilde $A(\vec{x}) = \mathbf{J}(\vec{x})$ olmasıdır.

\mathbf{G} fonksiyonu

$$\mathbf{G}(\vec{x}) = \vec{x} - (\mathbf{J}^{-1}(\vec{x}))\mathbf{F}(\vec{x})$$

olarak tanımlanır, fonksiyonel iterasyon için $\vec{x}^{(0)}$ başlangıç değeri seçilir ve $k \geq 1$ için iterasyon

$$\vec{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\vec{x}^{(k-1)}) = \vec{x}^{(k-1)} - (\mathbf{J}^{-1}(\vec{x}^{(k-1)}))\mathbf{F}(\vec{x}^{(k-1)}) \quad (5.4)$$

şeklinde elde edilir.

Bu yöntem lineer olmayan denklem sistemleri için Newton-Raphson yöntemi olarak bilinir. Eğer başlangıç koşulu yeterince doğru ve $(\mathbf{J}^{-1}(\vec{p}))$ mevcut ise, (5.4) dizisi verilen denklem sisteminin sabit noktasına ikinci dereceden yakınsar.

Newton-Raphson yönteminin genellikle büyük denklem sistemlerinin çözümünde tercih edilmemesinin nedeni her iterasyonda $\mathbf{J}(\vec{x})$ ve $\mathbf{J}^{-1}(\vec{x})$ matrislerinin hesaplanmasıdır. Bu olumsuzluktan kurtulmak için $\mathbf{J}(\vec{x}^{(k)})\vec{y} = -\mathbf{F}(\vec{x}^{(k)})$ olacak şekilde \vec{y} vektörü bulunur. $\vec{x}^{(k+1)}$ değerini hesaplamak için bu defa \vec{y} vektörü $\vec{x}^{(k)}$ ile toplanır.

Bununla ilgili algoritma aşağıda verilmiştir (Bayram 2009, ss. 401-405).

5.1.1 Newton-Raphson Algoritması

Bu algoritma \vec{x} başlangıç koşulu verilen $F(\vec{x}) = 0$ lineer olmayan denklem sisteminin yaklaşık çözümünü bulur.

Girdi

n : denklem ve bilinmeyen sayısı;

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ başlangıç değerleri ;

TOL : tolerans ;

N : maksimum iterasyon sayısı.

ÇIKTI

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ yaklaşık çözümü ya da maksimum iterasyondan sonra algoritmanın başarısız olduğuna ait mesaj.

1.Adım : $k = 1$ alınız.

2.Adım : $k \leq N$ olduğu sürece 3-7. Adımları tekrarlayınız.

3.Adım : $F(\vec{x})$ ve $J(\vec{x})$ değerlerini hesaplayınız. Burada $1 \leq i, j \leq n$ için $J(\vec{x})_{ij} = (\partial f_i(\vec{x}) / \partial x_j)$.

4.Adım : $n \times n$ tipindeki $J(\vec{x})y = -F(\vec{x})$ lineer denklem sistemini çözünüz.

5.Adım : $\vec{x} = \vec{x} + \vec{y}$ alınız.

6.Adım : Eğer $\|\vec{y}\| < TOL$ ise ,ÇIKTI (\vec{x});

(iterasyon başarıyla tamamlandı).

DUR

7.Adım : $k = k + 1$ alınız.

8.Adım : ÇIKTI (maksimum iterasyondan sonra işlem başarısızlıkla sonuçlandı.)

DUR (Bayram 2009, ss. 401-405).

6 TARTIŞMA

Problem 1-boyutta sonlu fark metotları ile lineer ve lineer olmayan durumlarda incelendi. Denklemin lineer olduğu durumda Fourier analizi yardımıyla sonlu fark metotlarının kararlılığı için gerek ve yeter koşulları bulundu. Açık İleri Euler Metodu için $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$ koşulu bulundu. Bu koşul ise Δx değerini daha duyarlı sonuç için azaltıldığında, zaman adımı Δt değerini de kararlılık koşulu sağlansın diye daha fazla işlem yapma maliyetinde küçültülmesi gerektiğini söylemektedir. Ayrıca, kararlılık koşulu ihlal edilmesine karşın hata hala kabul edilebilir bir oranda olabilir. Bu da kararlılık koşulunun yeter bir koşul olduğunu ama gerek bir koşul olmadığını söylemektedir. Kapalı Geri Euler Metodunda aynı şekilde Fourier analizi yardımıyla kararlılık koşulunu bulunmaya çalışılmıştır. Ancak bu metot için bir kararlılık koşulu bulunmamaktadır. Farklı λ değerleri için yapılan hata analizlerinde ise λ değeri büyüdükçe hata değerinin küçüldüğü görülmektedir. Crank-Nicolson metodunda ise kararlılık için hiçbir koşul bulunmamaktadır. Her λ değeri için metot çalışmakta ve en iyi sonuçları vermektedir. Crank-Nicolson metodu ile hata analizi yapıldığında hataların çok küçük olduğu görülmektedir. Aşağıdaki maksimum hata tablosunda her metodun farklı λ değerleri için maksimum hataları verilmiştir.

Tablo 6.1: **Maksimum Hata**

Metod	$\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ değerleri	Maksimum Hata
Açık İleri Euler Metodu	0.4	7.5×10^{-4}
	0.625	7.2×10^{-1}
	0.5208	1.09×10^{-3}
Kapalı Geri Euler Metodu	0.4	1.8×10^{-3}
	0.625	1.6×10^{-3}
Crank-Nicolson Metodu	0.4	5.2×10^{-4}
	0.625	3.3×10^{-4}

$\beta \neq 0$ olduğu durumda, 1-boyutlu sınır değer problemi, yaklaşık çözümü sonlu farklar metotları ve ortaya çıkan lineer olmayan denklem sistemleri de

Newton-Raphson metodu ile çözümlenerek çözüm grafikleri elde edildi. Newton-Raphson metodunda duyarlılık 10^{-7} olarak alındı. Farklı $\beta \neq 0$ değerleri için her bir metot ile grafikler oluşturuldu.

7 SONUÇ

Beyin tümörü problemi 1-boyutta bir sınır değer problemi olarak ele alınıp ve yaklaşık çözümü sonlu farklar metotları ve ortaya çıkan lineer olmayan denklem sistemleri de Newton-Raphson metodu ile çözüldü. Bunun neticesinde en iyi sonuçlar Crank-Nicolson metoduyla elde edildi. Probleme yeni parametreler eklenebilir ve 2-boyutta çalışmalara devam edilebilir.

KAYNAKÇA

Kitaplar

Allen, J. S., 2007. *Introduction to mathematical biology*. Pearson Prentice Hall.

Bayram, M., 2009. *Nümerik analiz*. Birsen Yayınevi, ss. 401-405.

Çağlıyan, M. ve Çelebi, O., 2010. *Kısmi diferansiyel denklemler*. Dora Yayıncılık.

Goldberg, R. R., 1965. *Fourier transforms*, Cambridge University Press: New York.

Habermann, R., 1965. *Elementary applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*. Third Edition, Pearson Education: New Jersey, pp. 240-251

Murray, J. D., 1989. *Mathematical Biology*. Heidelberg: Springer- Verlag.

Murray, J. D., 2003. *Mathematical Biology II: Spatial models and biomedical applications*. Springer, pp.536-605.

Rao, Singiresu S., 2002. *Applied numerical methods for engineers and scientists*. Prentice Hall Publication, pp. 514-515.

Strikwerda, J. C., 1989. *Finite difference schemes and partial differential equations*. Wadsworth and Brooks-Cole Publication, pp. 1-53

Titchmarsh, E.C., 1965. *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Clarendon Press: Oxford.

Yang, W. Y., Cao, W., Chung, T.-S., and Morris, J., 2005. *Applied numerical methods using MATLAB*. John Wiley Publication, pp. 406-411.

Süreli Yayınlar

Belien, A. T., Paganetti, P. A., Schwab, M.E., 1999. Membrane-type 1 matrix metalloprotease (mt 1-mmp) enables migration of glioma cells in central nervous system white matter. *Journal of Cell Biology* .**144**, pp.373-384.

Giese, A., Bjerkvig, R., Berens, M. E., Westphal, M., 2003. Cost of migration: Invasion of malignant gliomas and implications for treatment. *Journal of Clinical Oncology* .**21**, pp. 1624-1636.

Jbabdi, S., Mandonnet, E., Duffau, H., et al., 2005. Simulation of anisotropic growth of low-grade gliomas using diffusion tensor imaging. *Magnetic Resonance in Medicine* .**54**, pp. 16-24.

Konukoğlu, E., Clatz, O., Delingette, H., Ayache, N., 2009. Personalization of reaction-diffusion tumor growth models in MR images: application to brain gliomas characterization and radiotherapy planning. Asclepios Research Project.

Rockne, R., Alvord E. C., Rockhill J. K., Swanson K.R., 2009. A mathematical model for brain tumor response to radiation therapy. *J Math Bio*. **58**, pp. 561-78

Roniotis, A., Marias, K., Sakkalis, V., Zervakis, M., 2010. Diffusive modelling of glioma evolution: a review. *J. Biomedical Science and Engineering*. **3**, pp. 501-508.

Swanson, K. R., Alvord, E.C., Murray, J.D., 2002. Virtual brain tumours (gliomas) enhance the reality of medical imaging and highlight inadequacies of current therapy. *British Journal of Cancer* .**86**, pp.14-18.

Swanson, K. R., Alvord, E.C., Murray, J.D., 2000. A quantitative model for differential motility of gliomas in grey and white matter. *Cell Proliferation*. **33**, pp.317-330.

Tracqui, P., 1995. From passive diffusion to active cellular migration in mathematical models of tumour invasion. *Acta Biotheoretica*.**43**, pp.443-464.

EKLER

EK A.1

Açık İleri Euler Metodunun fortran programında yazılan kodu aşağıda verilmiştir.

```
IMPLICIT REAL*8 (A-F,O-Z)
COMMON /JUNK/ PIS,zero,one,two,three,rho
COMMON /JUNK1/ N
COMMON /JUNK2/ deltat,deltax,E,xlamda,epsi
DOUBLE PRECISION PIS,zero,one,two,three,rho
DOUBLE PRECISION PI,ac,GG,A1(12)
DOUBLE PRECISION FF(0:501)
DOUBLE PRECISION X(0:500)
DOUBLE PRECISION RHS(0:501)
DIMENSION A(501,501)
DIMENSION LV(501)
DOUBLE PRECISION EPSILON,epsi
DOUBLE PRECISION WOLD(0:501)
DOUBLE PRECISION WNEW(0:501)
DOUBLE PRECISION U(0:501)
DOUBLE PRECISION ERROR, SUM,SUM1
INTEGER ITER,N,NIN
PARAMETER (EPSILON = 0.0000001D0)
PARAMETER (NIN = 15)
OPEN(UNIT=NIN,STATUS='UNKNOWN',FILE='1st_iteration')
OPEN(UNIT=7,STATUS='UNKNOWN',FILE='error')
OPEN(UNIT=8,STATUS='UNKNOWN',FILE='hata_icin')
OPEN(UNIT=9,STATUS='UNKNOWN',FILE='initial_file')
OPEN(UNIT=10,STATUS='UNKNOWN',FILE='err_file')
OPEN(UNIT=11,STATUS='UNKNOWN',FILE='t_values')
OPEN(UNIT=12,STATUS='UNKNOWN',FILE='x_values')
```

```

OPEN(UNIT=13,STATUS='UNKNOWN',FILE='w_values')
OPEN(UNIT=14,STATUS='UNKNOWN',FILE='error_xlamda_dtdx')

rewind(7)
rewind(8)
rewind(9)
rewind(10)
rewind(11)
rewind(12)
rewind(13)
rewind(NIN)
epsi = 0.01D0
zero=0.0d0
one=1.0d0
two=2.0d0
three=3.0d0
rho=1.050d0
rho=0.010d0
rho=zero
ikey = 1
msay=0
PI = 4.0D0*DATAN(one)
PIS= 2.0D0 * PI
ipiv=0
prec=0.d0
ind_A = 1
write(6,*) 'enter N for deltax value'
read(5,*) N
write(6,*) 'enter deltat value'

```

```

read(5,*) deltat
write(6,*) 'enter N for deltax value'
    ntp = n + 1
    ntp = n
    nt = 501
    time=0.0d0
write(11,3) time
deltax=one/N
xlamda=deltat/(deltax*deltax)
write(8,88) zero,zero
write(6,*) time,'delta t'
write(6,*) deltax,'deltax'
write(6,*) xlamda,'xlamda'
write(6,*) rho,'rho'
itime=100
ifi=0
time=zero
DO I = 0,N
x(i)=i*deltax
u(i)=sin(pi*x(i))
write(6,*) wold(i),'wold at t=0 ',i
wold(i)=0.00010d0+u(i)
write(6,*) x(i),'x ',i
write(12,3) x(i)
write(13,3) u(i)
enddo
u(0)=zero
u(n)=zero

```

```

wold(0)=zero
wold(n)=zero
sume=zero
zdiff=zero
do mm=0,N
xexact=sin(pi*x(mm))*exp(-pi*pi*time)
sume=sume+(xexact-u(mm))*(xexact-u(mm))
88  format(f12.8,1x,f12.8)
enddo
do i=1,n+1
do j=1,n+1
a(i,j)=zero
enddo
enddo
time=time+deltat
write(6,*) ' ITERATION NUMBER  = ', ITER
write(6,*) ' ERROR            = ', ERROR
write(6,*) ' E                = ',E
write(6,*) 'time t           = ',time
write(6,*) 'deltax and deltat = ',deltax,deltat
write(6,*) 'xlamda ve rho    = ',xlamda,rho
write(6,*) ' -----',NIN+ifi
write(7,*) ' ITERATION NUMBER  = ', ITER
write(7,*) ' ERROR            = ', ERROR
write(7,*) ' E                = ',E
write(7,*) 'time t           = ',time
write(7,*) 'deltax and deltat = ',deltax,deltat
write(7,*) 'xlamda ve rho    = ',xlamda,rho

```

```

write(7,*) ' -----'
DO I=0,N
write(9,41) x(i),u(i),wold(i),xlamda,deltax,rho
+ ,NIN+ifi
enddo
close(9)
666   ERROR = 0.01D0
do j=1,itime
DO l=1,N-1
FF(l) = F(l,WOLD,U)
enddo
sume=zero
zdiff=zero
do mm=1,N-1
xexact=sin(pi*x(mm))*exp(-pi*pi*time)
sume=sume+(xexact-FF(mm))*(xexact-FF(mm))
u(mm)=FF(mm)
wold(mm)=0.00010d0+u(mm)
enddo
u(0)=zero
u(n)=zero
wold(0)=zero
wold(n)=zero
write(11,3) time
write(8,88) time,dsqrt(deltax*sume)
write(14,888) time,dsqrt(deltax*sume),deltat,deltax,xlamda
DO I=0,N
write(13,3) u(i)

```

```

        enddo
3      format(f12.8)

        time=time+deltat
        if(time.gt.0.1) goto 9999
        enddo

888    format(f10.8,1x,f12.8,1x,f10.8,1x,f10.8,1x,f10.8)
19      format(2f20.15)
20      format(2f20.10)
40      format(4f20.10)
41    format(2f15.10,1x,f5.2,1x,f8.4,1x,f8.4,1x
+ ,f8.4,1x,i4)
51      format(4f13.8)
9999   close(233)

        close(10)
        close(9)

STOP
END

SUBROUTINE MATINV(A,NN,NDIM,LIG,PREC,IOP)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(NDIM,NN)
DIMENSION LIG(NN)
ZERO=0.D0
UN=1.D0
DO 12 L=1,NN
LIG(L)=0
PIVOT=DABS(A(L,L))
DO 2 K=L,NN

```

```

Z=DABS(A(L,K))
IF (Z-PIVOT) 2,2,1
1  LIG(L)=K
PIVOT=Z
2  CONTINUE
IF (IOP) 4,4,3
3  PRINT 200,L,PIVOT
4  IF (PIVOT-PREC) 900,900,5
5  K=LIG(L)
IF (K) 8,8,6
6  DO 7 I=1,NN
Z=A(I,L)
A(I,L)=A(I,K)
7  A(I,K)=Z
8  Z=A(L,L)
A(L,L)=UN
DO 9 K=1,NN
9  A(L,K)=A(L,K)/Z
DO 12 I=1,NN
IF (I-L) 10,12,10
10 Z=A(I,L)
A(I,L)=ZERO
DO 11 K=1,NN
11 A(I,K)=A(I,K)-Z*A(L,K)
12 CONTINUE
DO 15 J=1,NN
I=NN+1-J
L=LIG(I)

```

```

IF (L) 15,15,13
13 DO 14 K=1,NN
Z=A(L,K)
A(L,K)=A(I,K)
14 A(I,K)=Z
15 CONTINUE
RETURN
900 PRINT 290,PIVOT,PREC
IOP=900
RETURN
200 FORMAT (10X,'PIVOT NUMBER',I3,'=',D13.6)
290 FORMAT (10X,'MATRIX SINGULAR....PIVOT=',D13.6,'SMALLER
1THAN PREC=',D13.6)
END
DOUBLE PRECISION FUNCTION F(I,WOLD,U)
IMPLICIT REAL*8 (A-F,O-Z)
COMMON /JUNK/ PIS,zero,one,two,three,rho
COMMON /JUNK1/ N
COMMON /JUNK2/ deltat,deltax,E,xlamda,epsi
COMMON /JUNK3/ xsi_old,xsi_new
DOUBLE PRECISION PIS,zero,one,two,three,rho
DOUBLE PRECISION U(0:501)
DOUBLE PRECISION WOLD(0:501)
DOUBLE PRECISION zt,zav,zxn,zxo,zx1n,zx1o
DOUBLE PRECISION zxxn,zxxo,z1x,z1b,zn,znb,z3,z4
DOUBLE PRECISION clamda,xlamda,elamda,alamda
INTEGER I, J,N
u(0)=zero

```



```
u(N)=zero
z1 = (one-two*xlamda)*u(i)
z2 = xlamda*(u(i+1)+u(i-1))
z3=u(i)
z4 = deltat*rho*z3*(one-z3)
f=z1+z2+z4
RETURN
END
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Reyhan TELLİOĞLU
Doğum Yeri ve Yılı: İstanbul 1986
Yabancı Dili: İngilizce
Orta Öğretim: Bingül Erdem Lisesi 2003
Lisans: İstanbul Bilgi Üniversitesi Finans Matematiği 2009
Yüksek Lisans: Bahçeşehir Üniversitesi
Enstitü Adı: Fen Bilimleri Enstitüsü
Program Adı: Uygulamalı Matematik Programı